Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 5:

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

Cùng với phương trình, bất phương trình vô tỷ thì hệ phương trình là bài toán luôn xuất hiện trong đề thi các năm

Thứ tự ưu tiên các hướng khi giải hệ phương trình

+ *Các hệ mà 2 phương trình của hệ có dạng tương đương thì trừ 2 vế của hệ, hoặc cộng 2 vế của hệ sẽ được nhân tử chung.*

+ *Biến đổi tương đương hệ phương trình đã cho, biến đổi rút ra một phương trình trong hệ là phương trình tích.*

+ *Các hệ có biệt thức* $xy; x+y; (x+y)^2; x-y; x^2-y^2, \ldots$ *đặt* $u=x+y; v=xy$

+ *Có các nhân tử chung ở các phương trình của hệ thì đặt ẩn phụ.*

+ *Thường thì Đề thi Đại Học cho đặt ẩn phụ nhưng ta không thể nhận thấy ngay được nên đặt cái gì. Vì vậy phải chia hoặc nhân với một biểu thức của biến nào đó(chẳng hạn như* $x, y, x^2, x^3, xy, \ldots$ *) sau đó mới đặt ẩn phụ được.*

+ *Hệ có một phương trình dạng là hàm bậc 2 của* x *hoặc của* y*, giải phương trình này theo ẩn đó sẽ rút ra* x *theo* y *(hoặc* y *theo* x *).*

+ *Thay biểu thức ở một phương trình vào phương trình còn lại.*

+ *Biến đổi các phương trình trong hệ rùi dung phương pháp hàm số.*

+ *Đánh giá nhờ vào điều kiện có nghiệm của hệ, các bất đẳng thức.*

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 & (1) \\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 & (2) \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải:

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ:

$xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 \Leftrightarrow xy(x+y)^2-2x^2y^2+2=(x+y)^2$

$\Leftrightarrow (x+y)^2(xy-1)-2(xy-1)(xy+1)=0 \Leftrightarrow (xy-1)((x+y)^2-2(xy+1))=0$

$\Leftrightarrow (xy-1)(x^2+y^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ x^2+y^2=2 \end{array}\right.$

(i). Với $xy=1$, thay vào (1) ta được: $5x^2y-4xy^2+3y^3-2xy(x+y)=0$

$\Leftrightarrow 3x^2y-6xy^2+3y^3=0 \Leftrightarrow y(x-y)^2=0$, nhưng do $xy=1$ nên $x=y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{array}\right.$

(ii). Với $x^2+y^2=2$, thay vào (1) ta được: $5x^2y-4xy^2+3y^3-(x^2+y^2)(x+y)=0$

$\Leftrightarrow x^3-4x^2y+5xy^2-2y^3=0 \Leftrightarrow (x-2y)(x-y)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=y \end{array}\right.$

Thay vào phương trình (1) ta suy ra các nghiệm của hệ là

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x=2\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y=\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}; \begin{cases} x=-2\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y=-\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2 \\ 4x^2+y^2=5(2x-y)\sqrt{xy} \end{cases} \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Lời giải:

Điều kiện: $xy\geq 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Hệ tương đương với $\begin{cases} x+y=2 \\ (2x-y)^2+4xy-5(2x-y)\sqrt{xy}=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ \left(2x-y-\sqrt{xy}\right)\left(2x-y-4\sqrt{xy}\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y-\sqrt{xy}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y-4\sqrt{xy}=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ 3x-2=\sqrt{2x-x^2} \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=2 \\ 3x-2=4\sqrt{2x-x^2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=1 \\ x=\dfrac{22+8\sqrt{6}}{25}, y=\dfrac{22-8\sqrt{6}}{25} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(1,1);\left(\dfrac{22+8\sqrt{6}}{25},\dfrac{22-8\sqrt{6}}{25}\right)$

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x^2+y)(x+y)+x(2x+1)=7-2y \\ x(4x+1)=7-3y \end{cases}$

Lời giải:

$$\begin{cases} 2x^3+2x^2y+xy+y^2+2x^2+x=7-2y \\ 4x^2+x=7-3y \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được phương trình

$$2x^3+2x^2y+xy+y^2-2x^2=y \Leftrightarrow 2x^2(x+y)+y(x+y)-(2x^2+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x^2+y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2x^2 \\ y=1-x \end{array}\right.$$

Đến đây xét từng trường hợp ta suy ra nghiệm của hệ

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy-x+y=3 \\ 4x^3+12x^2+9x=-y^3+6y+5 \end{cases}$

Lời giải:

Hệ tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} xy - x + y = 3 \\ (x+y+1)(2x+2-y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1-x \\ xy - x + y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2-2x \\ xy - x + y = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1-x \\ x(-1-x) - x - 1 - x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2-2x \\ x(-2-2x) - x - 2 - 2x = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -1-x \\ x(-1-x) - x - 1 - x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2-2x \\ x(-2-2x) - x - 2 - 2x = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{4} \\ y = \dfrac{2 \mp 2\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y) = \left(\dfrac{-5 \pm \sqrt{5}}{4}, \dfrac{2 \mp 2\sqrt{5}}{4} \right)$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 4x = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x(x^2 - 16) = y(y^2 - 4) \\ y^2 = 4 + 5x^2 \end{cases}$$

Bình phương hai vế phương trình thứ nhất của hệ ta được

$x^2(x^2-16)^2 = y^2(y^2-4)^2$ và thay $y^2 = 4 + 5x^2$ vào ta được

$x^2(x^2-16)^2 = 25x^4(4+5x^2)^2 \Leftrightarrow 4x^2(x^2-1)(31x^2+64) = 0$

- Với $x = 0$ ta được $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$
- Với $x^2 = 1$ hệ trở thành $\begin{cases} -15x = 5y \\ y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ có bốn nghiệm là $(0, \pm 2); (-1, 3); (1, -3)$

<u>Cách khác:</u> Xem phương pháp đồng bậc

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 5. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=3 \\ 2y\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=1 \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện $x>0, y\neq 0$.

Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 1+\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{2x} \\ 1-\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2y} \\ 2=\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2y} \end{cases} \quad (*)$$

Nhân theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$\frac{4}{x^2+y^2}=\frac{9}{4x^2}-\frac{1}{4y^2} \Leftrightarrow 9y^4+8x^2y^2-x^4=0$$

$$\Leftrightarrow \left(9y^2-x^2\right)\left(y^2+x^2\right)=0 \Leftrightarrow x^2=9y^2 \Leftrightarrow x=\pm 3y$$

Từ đây thay vào phương trình (*) ta được nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2+6y=\dfrac{x}{y}-\sqrt{x-2y} & (1) \\ \sqrt{x-\sqrt{x-2y}}=x+3y-2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình (1) của hệ ta suy ra: $x-2y-y\sqrt{x-2y}-6y^2=0$ (*)

Ta đặt $t=\sqrt{x-2y}$, khi đó phương trình (*) trở thành: $t^2-yt-6y^2=0$, phương trình này có biệt thức $\Delta=25y^2$, do đó $\left[\begin{array}{l} t=3y \\ t=-2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2y}=3y \\ \sqrt{x-2y}=-2y \end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

(i). Với $\sqrt{x-2y}=3y$, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases}\sqrt{x-2y}=3y\\ \sqrt{x-\sqrt{x-2y}}=x+3y-2\end{cases}$$

(ii). Với $\sqrt{x-2y}=-2y$ ta có hệ

$$\begin{cases}\sqrt{x-2y}=-2y\\ \sqrt{x-\sqrt{x-2y}}=x+3y-2\end{cases}$$

Bài 7. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}16x^3y^3-9y^3=(2xy-y)(4xy^2+3)\\ 4x^2y^2-2xy^2+y^2=3\end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ đã cho, khi đó ta chia hai vế của phương trình thứ nhất cho y^3 và chia cả hai vế của phương trình thứ hai cho y^2, khi đó hệ trở thành :

$$\begin{cases}16x^3-9=(2x-1)\left(4x+\dfrac{3}{y^2}\right) & (1)\\ 4x^2-2x+1=\dfrac{3}{y^2} & (2)\end{cases}$$

Thế $\dfrac{3}{y^2}$ từ phương trình (2) vào phương trình (1), ta được :

$16x^3-9=(2x-1)(4x+4x^2-2x+1)\Leftrightarrow 16x^3-9=(2x-1)(4x^2+2x+1)$

$\Leftrightarrow 16x^3-9=8x^3-1\Leftrightarrow x=1$, thay vào phương trình (2) ta suy ra $\dfrac{3}{y^2}=3\Leftrightarrow y=\pm 1$.

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(1,-1);(1,1)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1)=3x^2-4x+1 \\ xy+x+1=x^2 \end{cases}$$

Lời giải:

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ, từ phương trình thứ hai của hệ ta có

$y+1=\dfrac{x^2-1}{x}$ ta thế vào phương trình thứ nhất, ta được

$$x^2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\left(x+\frac{x^2-1}{x}\right)=3x^2-4x+1 \Leftrightarrow (x-1)(2x^3+2x^2-4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \text{ do } x\neq 0.$$

- Với $x=1 \Rightarrow y=0$.
- Với $x=-2 \Rightarrow y=-\dfrac{5}{2}$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(1;0);\left(-2;-\dfrac{5}{2}\right)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y+xy(2x+y)=5xy \\ x+y+xy(3x-y)=4xy \end{cases}$$

Lời giải :

Nhận thấy $x=0, y=0$ là một nghiệm của hệ.

Với $x=0, y\neq 0$ hoặc $x\neq 0, y=0$ không là nghiệm của hệ.

Ta xét $xy\neq 0$, khi đó chia theo vế cả hai phương trình trong hệ cho xy thì hệ trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+2x+y=5 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+3x-y=4 \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta suy ra : $2y-x=1 \Rightarrow x=2y-1$ ta thế vào phương trình thứ hai của hệ ta được :

$$2y-1+y+y(2y-1)(5y-3)=4y(2y-1) \Leftrightarrow 10y^3-19y^2+10y-1=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow (y-1)(10y^2-9y+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=\dfrac{9\pm\sqrt{41}}{20} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1;\, y=1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{10};\, y=\dfrac{9\pm\sqrt{41}}{20} \end{array}\right.$$

Bài 10. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=1+\sqrt{x^2-y^2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $x\ge y\ge 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $\left(\sqrt{x+y}-1\right)\left(\sqrt{x-y}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+y}=1 \\ \sqrt{x-y}=1 \end{array}\right.$

(i). Với $\sqrt{x+y}=1$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases} \sqrt{x+y}=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0;\, y=1 \\ x=1;\, y=0 \end{array}\right.$

(ii). Với $\sqrt{x-y}=1$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases} \sqrt{x-y}=1 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1;\, y=0$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(1;0);(0;1)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y+x^3y+xy^2+xy=\dfrac{-5}{4} \\ x^4+y^2+xy(1+2x)=\dfrac{-5}{4} \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$$

<u>Lời giải:</u>

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^2+y+xy(x^2+y+1)=\dfrac{-5}{4} & (1) \\ (x^2+y)^2+xy=\dfrac{-5}{4} & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được :

$$(x^2+y)(1-(x^2+y))+xy(x^2+y)=0 \Leftrightarrow (x^2+y)(xy+1-(x^2+y))=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y=0 \\ xy+1-(x^2+y)=0 \end{array}\right.$$

+ Với $x^2+y=0 \Rightarrow y=-x^2 \Rightarrow HPT \Leftrightarrow x.(-x^2)=\frac{-5}{4} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{5}{4}} \Rightarrow y=-\sqrt[3]{\frac{25}{16}}$

+ Với $xy+1-(x^2+y)=0 \Leftrightarrow x^2+y=xy+1 \Rightarrow HPT \Leftrightarrow \begin{cases} xy+1+xy(xy+2)=\frac{-5}{4} \\ (xy+1)^2+xy=\frac{-5}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (xy)^2+3xy+\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow xy=\frac{-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} xy=\frac{-3}{2} \\ x^2+y=\frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{-3}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x,y)=\left(1,-\frac{3}{2}\right);\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}},-\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right)$ **Bài 12.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2-\frac{5}{x^2}+1=0 \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải:

Điều kiện $x\neq 0$

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x+y+1-\frac{3}{x}=0 \\ (x+y)^2-\frac{5}{x^2}+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{x}-1 \\ (\frac{3}{x}-1)^2-\frac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{x}-1 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\frac{3}{x}-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{-3}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm: $(x,y)=(1,1);\left(2,-\frac{3}{2}\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 13. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x(y-9)+\sqrt{y-1}+1=0 & (1) \\ y(18x^2+1)=3x+22+(xy+1)^2 & (2) \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện: $y \ge 1$

Khi đó từ (1) ta suy ra: $\sqrt{y-1}+1=0=x(y-9) \Rightarrow 81x^2+x^2y^2-18x^2y-y-2\sqrt{y-1}=0$ (3)

và (2) tương đương với: $18x^2y+y=3x+22+x^2y^2+2xy+1$

$\Leftrightarrow 18x^2y+y-3x-x^2y^2-2xy-22=0$ (4)

Lấy (3) cộng với (4) theo vế ta được:

$81x^2-3x-22-2(xy+\sqrt{y-1})=0$ (*)

Mặt khác từ (1) ta lại có: $xy+\sqrt{y-1}=9x-1$, thay vào (*) ta suy ra:

$81x^2-3x-22-2(9x-1)=0 \Leftrightarrow 81x^2-21x-20=0$

Bài 14. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y} \\ x+y=\sqrt{x+y+2} \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x-y \ge 0 \\ x+y \ge 0 \end{cases}$ (*)

Khi đó hệ tương đương với:

$$\begin{cases} (x-y)^2=(x-y)^3 \\ (x+y)^2=(x+y)+2 \end{cases} \overset{\text{ĐK (*)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (x-y)^2(x-y-1)=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm: $(x,y)=(1,1);(2,0)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 15. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(\sqrt{3x+4}-\sqrt{5-x})2^y = 2(\dfrac{19}{x}-3x+8)\\ y+\log_2 x = 1\end{cases}$$

Lời giải:

+ Điều kiện $0 < x \le 5$

+ Từ (2) ta có $y = 1-\log_2 x = \log_2 \dfrac{2}{x} \Rightarrow 2^y = \dfrac{2}{x}$, thay vào phương trình (1) ta được phương trình:

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{5-x} = 19-3x^2+8x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+4}-4)+(1-\sqrt{5-x}) = 16-3x^2+8x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-12}{\sqrt{3x+4}+4}+\frac{x-4}{1+\sqrt{5-x}} = -(x-4)(3x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(\frac{3}{\sqrt{3x+4}+4}+\frac{1}{1+\sqrt{5-x}}+3x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-4 = 0\ (x>0) \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = -1$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y) = (4;-1)$

Bài 16. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^4+2x^3y+x^2y^2 = 2x+9 \quad (1)\\ x^2+2xy = 6(x+1) \quad\quad (2)\end{cases} (x,y\in\mathbb{R}) \quad (*)$$

Lời giải:

+ Thay $2xy = 6x+6-x^2$ ở (2) vào phương trình (1), ta được

$$x^4+x^2(6x+6-x^2)+(\frac{6x+6-x^2}{2})^2 = 2x+9$$

$$\Leftrightarrow 4x^2(6x+6)+(6x+6-x^2)^2 = 4(2x+9)$$

$$\Leftrightarrow x^4+2x^2(6x+6)+(6x+6)^2 = 4(2x+9)$$

$$\Leftrightarrow x^4+12x^3+48x^2+64x = 0 \Leftrightarrow x(x^3+12x^2+48x+64) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-4\end{array}\right.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Với $x=0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0=9 \\ 0=6 \end{cases} \Rightarrow VN$

+ Với $x=-4 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=\dfrac{17}{4} \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(-4,\dfrac{17}{4}\right)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$$

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases} xy \ge 0 \\ x,y \ge -1 \end{cases} (*)$

Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3+\sqrt{xy} \\ x+y+2\sqrt{xy+x+y+1}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3+\sqrt{xy} \\ 3+\sqrt{xy}+2\sqrt{xy+4+\sqrt{xy}}=14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3+\sqrt{xy} \\ 4(xy+4+\sqrt{xy})=(11-\sqrt{xy})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3+\sqrt{xy} \\ 3xy+26\sqrt{xy}-105=0 \end{cases}$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y=3+\sqrt{xy} \\ \sqrt{xy}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ \sqrt{xy}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(3,3)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy+x+1=7y & (1) \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 & (2) \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Nhận thấy $y=0$, không là nghiệm của hệ, do đó ta chia cả 2 vế của (1) cho y; chia cả 2 vế của (2) cho y^2.

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} x+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=7 \\ x^2+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+\dfrac{1}{y})+\dfrac{x}{y}=7 \\ (x+\dfrac{1}{y})^2-\dfrac{x}{y}=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+\dfrac{1}{y})=7-\dfrac{x}{y} \\ (7-\dfrac{x}{y})^2-\dfrac{x}{y}=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+\dfrac{1}{y})=7-\dfrac{x}{y} \\ (\dfrac{x}{y})^2-15\dfrac{x}{y}+36=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+\dfrac{1}{y})=7-\dfrac{x}{y} \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y}=12 \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=12 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm $(x,y)=(12,1);\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 19. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x+3}=\dfrac{y-3}{x} \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3 \end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $x>0; y\geq 3$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{y-3}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}}=\frac{y-3}{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x \end{array}\right.$$

(i). Với $y=3$, khi đó $2\sqrt{x+3}=0 \Leftrightarrow x=-3$ loại.

(ii). Với $\sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x}=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}+\sqrt{x}=3 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x+3}=x \end{cases} \Leftrightarrow x=1; y=8$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(1,8)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy-3x+y=0 \\ x^4+3x^2y-5x^2+y^2=0 \end{cases}$

Lời giải:

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2+y=3x-xy \\ \left(x^2+y\right)^2+x^2y-5x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=3x-xy \\ (3x-xy)^2+x^2y-5x^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=3x-xy \\ x^2\left(y^2-5y+4\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=1 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4 \\ x^2+x+4=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(0;0);(1;1)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3+5y^3-2xy=6 \\ 2x^3+3y^3+3xy=8 \end{cases}$

Lời giải:

Hệ tương đương với $\begin{cases} 3x^3+5y^3=2xy+6 \\ 2x^3+3y^3=-3xy+8 \end{cases}$

Lúc này coi đây là hệ với hai ẩn là $x^3;y^3$ từ đó suy ra hệ tương đương với

$\begin{cases} x^3=22-21xy \\ y^3=13xy-12 \end{cases}$ nhận thấy $x=0$ hoặc $y=0$ không thỏa mãn hệ nên nhân hai vế của hệ với nhau

ta được

$$(xy)^3=(22-21xy)(13xy-12) \Leftrightarrow (xy-1)\left((xy)^2+274xy-264\right)=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 1 \\ xy = -137 \pm \sqrt{19033} \end{array}\right.$$

- Với $xy = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

- Với $xy = -137 \pm \sqrt{19033} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{22 - 21\left(-137 \pm \sqrt{19033}\right)} \\ y = \sqrt[3]{13 - 12\left(-137 \pm \sqrt{19033}\right)} \end{cases}$

Vậy hệ có ba nghiệm

<u>Bình luận:</u> Dạng bài toán này có cách giải rất hay và hết sức cơ bản, ta có thể sáng tạo nhiều bài toán tương tự

Bài 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = x^2y + y + 1 \\ (x + y - 1)\sqrt{y + 1} = 10 \end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 + 2y + 1 \geq 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$

Khi đó biến đổi phương trình thứ nhất của hệ

$$x^3 + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = x^2y + y + 1 \Leftrightarrow x^2(x - y) + \sqrt{x^2 + 2y + 1} - (y + 1) = 0$$

Nếu cả $y + 1 = \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x^2 = 1 \end{cases}$ thay vào phương trình đầu của hệ ta được $x^3 = -x^2 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow x + y - 1 = -3 < 0$ không thỏa mãn vậy chúng không đồng thời bằng 0, khi đó biến đổi phương trình như sau

$$\Leftrightarrow x^2(x - y) + \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + 2y + 1} + (y + 1)} = 0 \Leftrightarrow (x - y)\left(x^2 + \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + 2y + 1} + (y + 1)}\right) = 0$$ nhưng do

$(x + y - 1)\sqrt{y - 1} = 10 \Rightarrow x + y > 1$ nên $x^2 + \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + 2y + 1} + (y + 1)} > 0$

Vậy $y = x$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\left(2x-1\right)\sqrt{x-1}=10 \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \left(x-1\right)\left(2x-1\right)^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \left(x-3\right)\left(4x^2+4x+17\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(3;3\right)$

Bài 23. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 \\ y+xy^2=-6x^2 \end{cases}$

Lời giải:

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình, với $x\neq 0$ nhân vào hai vế của phương trình thứ hai với x ta được hệ

$$\begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 \\ xy+x^2y^2=-6x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x^3y^3+\dfrac{19}{6}\left(xy+x^2y^2\right)=0 \\ 1+x^3y^3=19x^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(xy+\dfrac{2}{3}\right)\left(xy+\dfrac{3}{2}\right)\left(xy+1\right)=0 \\ 1+x^3y^3=19x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{1}{3};-2\right);\left(-\dfrac{1}{2};3\right)$

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+2x+2y-16=0 \\ \left(x+y\right)\left(xy+4\right)=32 \end{cases}$

Lời giải:

Hệ tương đương với

$$\begin{cases} x\left(x+y\right)+2\left(x+y\right)=16 \\ \left(x+y\right)\left(xy+4\right)=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+y\right)\left(x+2\right)=16 \\ \left(x+y\right)\left(xy+4\right)=32 \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{16}{x+y} = \dfrac{32}{xy+4} \\ (x+y)(x+2) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2x \\ (x+y)(x+2) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 6 \\ y = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy hệ có ba nghiệm $(x; y) = (0;8);(2;2);(-6;2)$

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 12y^3 + xy(7x+16y) = 0 \\ \sqrt{x-2y} + \sqrt{x+2y} = 2 \end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện $\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ x + 2y \geq 0 \end{cases}$

Khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} (x-3y)(x-2y)^2 = 0 \\ 2x + 2\sqrt{x^2 - 4y^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3y \\ x = 2y \end{array} \right. \\ x + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3y \\ \sqrt{5y^2} = 2 - 3y \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2y \\ 2y = 2 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = 1 \\ x = \dfrac{9 - 3\sqrt{5}}{2}; y = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x; y) = (2;1);\left(\dfrac{9 - 3\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)$

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x^2 + 2y + x + 1} + 4y + x + 1 = 0 \\ 2(y^3 + 2y - x - 1) = y^2(x+1) \end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

Viết phương trình thứ hai của hệ dưới dạng

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$2\left(y^3+2y-x-1\right)=y^2\left(x+1\right)\Leftrightarrow 2\left(y^3+2y\right)=y^2\left(x+1\right)+2\left(x+1\right)$

$\Leftrightarrow 2y\left(y^2+2\right)=\left(x+1\right)\left(y^2+2\right)\Leftrightarrow 2y=x+1$, thay vào phương trình đầu tiên của hệ ta được phương trình

$x\sqrt{x^2+2x+2}+3\left(x+1\right)=0$

Nếu $x\geq 0$ thì vế trái của phương trình luôn lớn hơn 0, vậy nên phương trình có nghiệm nếu $x<0$, nên chia cả hai vế của phương trình cho $x^2, x<0$ ta được

$$-\sqrt{1+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0\Leftrightarrow \sqrt{1+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\geq 0\\ 1+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1+\sqrt{10}}{9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x<0\\ \frac{1+\sqrt{10}}{9}x^2-x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\left(3-\sqrt{13+4\sqrt{10}}\right)\left(\sqrt{10}-1\right)}{6}$$

Suy ra $y=\dfrac{\left(3-\sqrt{13+4\sqrt{10}}\right)\left(\sqrt{10}-1\right)+6}{12}$

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x^2-y^2}=xy\left(x+3\right)\\ x^2\left(1-4xy^2\right)=y^2\left(1+8x^2\right)\end{cases}$

Lời giải:

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}xy\left(x+3\right)\geq 0\\ x^2-y^2=x^2y^2\left(x+3\right)^2\\ x^2-y^2=4x^3y^2+8x^2y^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}xy\left(x+3\right)\geq 0\\ x^2y^2\left(x+3\right)^2=4x^3y^2+8x^2y^2\\ x^2-y^2=x^2y^2\left(x+3\right)^2\end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy(x+3)\ge 0 \\ x^2y^2(x+1)^2=0 \\ x^2-y^2=x^2y^2(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x^2-y^2=x^2y^2(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0;y=0 \\ x=-1;y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có ba nghiệm là $(x;y)=(0;0);\left(-1;\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

Bài 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2y+y^3=2x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện $y\ge -1$

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ

$$2x^2y+y^3=2x^4+x^6 \Leftrightarrow 2x^2(y-x^2)+(y-x^2)(x^4+x^2y+y^2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y)(2x^2+x^4+x^2y+y^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x^2 \\ 2x^2+x^4+x^2y+y^2=x^2(y+2)+x^4+y^2=0 \end{array}\right.$$

- Nếu $x^2(y+2)+x^4+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$ thử lại nghiệm thấy không thỏa mãn.
- Nếu $y=x^2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình

$$(x+2)\sqrt{x^2+1}=(x+1)^2=x^2+2x+1 (*)$$

Đến đây ta đặt $t=\sqrt{x^2+1}$ khi đó phương trình (*) trở thành

$$t^2+2x=(x+2)t \Leftrightarrow (t-x)(t-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1}=2 \\ \sqrt{x^2+1}=x \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3} \text{ suy ra } y=3$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(\pm\sqrt{3};3)$

Bài 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{x-y-1}=1 \\ y^2(1-x)+x+2y\sqrt{x}=0 \end{cases}$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x - y - 1 \ge 0 \end{cases}$

Khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{x} - 1 = \sqrt{x - y - 1} \\ y^2(1 - x) + x + 2y\sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\sqrt{x} + 1 = x - y - 1 \\ y^2 + 2y\sqrt{x} + x - xy^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x} - 2 \\ \left(y + \sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{x}y\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x} - 2 \\ \left[\begin{array}{l} y + \sqrt{x} = y\sqrt{x} \\ y + \sqrt{x} = -y\sqrt{x} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3\sqrt{x} - 2 = 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) \\ 3\sqrt{x} - 2 = -2\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1\right) \end{array}\right. \\ y = 2\sqrt{x} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4; y = 2 \\ x = \frac{1}{4}; y = -1 \\ x = \frac{\sqrt{\sqrt{17} - 1}}{2}; y = \sqrt{2\sqrt{17} - 2} - 2 \end{array}\right.$$

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 2\sqrt{y + 1} = 3 \\ x^3 - 4x^2\sqrt{y + 1} - 9x - 8y = -52 - 4xy \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện: $y \ge -1$

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x \ge 3 \\ y = \frac{x^2 - 6x + 5}{4} \\ x^3 - 4x^2.\frac{x - 3}{2} - 9x - 8.\frac{x^2 - 6x + 5}{4} + 52 + 4x.\frac{x^2 - 6x + 5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 - 6x + 5}{4} \\ -x^2 + 4x + 21 = 0 \\ x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(7;3)$

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3+\dfrac{3xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}\left(\sqrt[3]{2x-y}+\sqrt[3]{6x+y}\right)=\sqrt[3]{3x-5y+5} \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện: $x+y>0$

Khi đó biến đổi phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$x^3+y^3+\frac{3xy}{x+y}=1 \Leftrightarrow (x+y)\left(x^3+y^3\right)+3xy-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2\left(x^2+y^2-xy\right)+3xy-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2\left((x+y)^2-3xy\right)+3xy-(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^4-(x+y)+3xy\left(1-(x+y)^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left((x+y)^3+(x+y)^2+x+y-1-3xy(x+y+1)\right)=0\ (*)$$

Nhưng do $(x+y)^3+(x+y)^2+x+y-1-3xy(x+y+1)$

$$=x^3+y^3+x^2+y^2-xy+x+y=(x+y)\left(x^2+y^2-xy+1\right)+x^2+y^2-xy>0$$

Với $x+y>0$

Vậy nên phương trình (*) tương đương với $x+y-1=0$; lúc này thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình

$\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{5x+1}=2\sqrt[3]{x}$ (phương trình này được giải bằng cách lập phương hai vế; chi tiết xem ***Chuyên đề phương trình, bất phương trình vô tỷ***).

Giải phương trình trên có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{1}{5} \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=1 \\ x=-\dfrac{1}{5}, y=\dfrac{6}{5} \\ x=\dfrac{1}{3}, y=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ có ba nghiệm là $(x;y)=(0;1);\left(\frac{-1}{5};\frac{6}{5}\right);\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau:

Bài 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(3x+y)(x+3y)\sqrt{xy}=14\\(x+y)(x^2+14xy+y^2)=36\end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{12}{x+y}\\xy=-15\end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}xy(x+y)^2-2(x+y)+3=0\\xy(x-y)^2-4x^2y^2+(x+y)^2=0\end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^3+3y=y^3+4x\\5(1+3y^2)=4(3x^2+2)\end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x(x^2+1)+xy(2x-3y)+y(x-2)=2y^2(1+5y)\\(x^2+17y+12)^2=4(x+y+7)(x^2+3x+8y+5)\end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+2y^3-2xy=1\\2x^3+y^3+2xy=5\end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3+x^2y^2-xy=2\\-x^3+y^3+xy=1\end{cases}$

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+\sqrt{x^2+1+3y-y^2}=x^2(y-1)+\sqrt{y}\\(x+y-1)\sqrt{y+1}=10\end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y+1)(2x+2y-1)=9\\(3x+y-1)\sqrt{y+1}=10\end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\left(y^3+2y-x-1\right)=y^2\left(x+1\right) \\ \sqrt{x^2+2y-2}+\sqrt{2y-x^2}=x^2-2y+3 \end{cases}$

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2\left(2y+5\right)+6y+7=0 \\ 5\sqrt{x^2+4y+5}=11x-2y-7 \end{cases}$

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{xy-6}=12-y^2 \\ x^2y-x^3-3x+3y-xy^2-x^2y=0 \end{cases}$

Bài 12. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_3\left(3x-y\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x+y\right)=1+\log_3 2 \\ x^2+y^2-2x+3y-35=0 \end{cases}$

Bài 13. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+x}\right)x=y-x \\ x+\dfrac{x}{\sqrt{y^2-1}}=-\dfrac{35}{12} \end{cases}$

Bài 14. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=3 \\ 6\dfrac{\left(x+y\right)^2}{xy}+x^2+y^2-5\left(x+y\right)=2\dfrac{x^2}{y}+3\dfrac{y^2}{x}+6 \end{cases}$

HỆ ĐỐI XỨNG

(i). Hệ đối xứng loại 1.

Hệ đối xứng loại 1 là hệ mà vai trò của x, y trong hệ là như nhau.

Nếu $\left(x_0, y_0\right)$ là nghiệm của hệ thì $\left(y_0, x_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ.

Phương pháp:

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$ với điều kiện $S^2\ge 4P$.

(ii). Hệ đối xứng loại 2.

Hệ đối xứng loại 2 là hệ mà khi ta đổi vai trò x, y cho nhau thì phương trình này chuyển thành phương trình kia.

Nếu $\left(x_0, y_0\right)$ là nghiệm của hệ thì $\left(y_0, x_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ.

Phương pháp:

Trừ theo vế hai phương trình trong hệ ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$(x-y)f(x,y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ f(x,y)=0 \end{array}\right.$$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+2xy=2 \\ x^3+y^3=8 \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Đặt $S=x+y, P=xy$. Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} S+2P=2 \\ S(S^2-3P)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{2-S}{2} \\ S\left(S^2-\dfrac{6-3S}{2}\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2 \\ P=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(2,0);(0,2)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ (x+y)(8+xy)=2 \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Đặt $S=x+y, P=xy$. Khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} S(S^2-3P)=19 \\ S(8+P)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP=2-8S \\ S^3-3(2-8S)=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(3,-2);(-2,3)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 3. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2(x+y)=3\left(\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}\right) \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6 \end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Đặt $\sqrt[3]{x}=a, \sqrt[3]{y}=b$ khi đó hệ trở thành : $\begin{cases} 2(a^3+b^3)=3(a^2b+b^2a) \\ a+b=6 \end{cases}$

Đặt $S=a+b, P=ab$ khi đó hệ trên trở thành

$$\begin{cases} 2S(S^2-3P)=3SP \\ S=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=6 \\ P=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ ab=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \Rightarrow x=64 \\ b=2 \Rightarrow y=8 \end{cases} \vee \begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm của hệ là $(x,y)=(64,8);(8,64)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện : $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x,y \geq -1 \end{cases}$

Đặt $S=x+y, P=xy$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} S-\sqrt{P}=3 \\ S+2+2\sqrt{S+P+1}=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=(S-3)^2, S\geq 3 \\ 2\sqrt{S+(S-3)^2+1}=14-S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S=6 \\ P=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

Bài 5. Giải hệ phương trình :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases}3x^3 = x^2 + 2y^2\\ 3y^3 = y^2 + 2x^2\end{cases}$$

Lời giải :

Từ hai phương trình của hệ suy ra hệ có nghiệm nếu $x, y \geq 0$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ, ta được

$3\left(x^3 - y^3\right) = -\left(x^2 - y^2\right) \Leftrightarrow (x-y)\left(3\left(x^2 + y^2 + xy\right) + x + y\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = y\\ 3\left(x^2 + y^2 + xy\right) + x + y = 0\end{array}\right.$

(i). Nếu $x = y$, khi đó ta được hệ $\begin{cases}x = y\\ 3x^3 = x^2 + 2y^2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = y = 0\\ x = y = 1\end{array}\right.$

(ii). Nếu $3\left(x^2 + y^2 + xy\right) + x + y = 0$, khi đó ta có hệ

$\begin{cases}3\left(x^2 + y^2 + xy\right) + x + y = 0\\ 3x^3 = x^2 + 2y^2\end{cases}$

Từ $x \geq 0$ suy ra để hệ có nghiệm thì phương trình thứ nhất phải có nghiệm $y \leq 0$. Do đó $x = y = 0$ là nghiệm duy nhất của hệ này.

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x, y) = (0,0); (1,1)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}x^2 + \sqrt{x} = 2y\\ y^2 + \sqrt{y} = 2x\end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $x, y \geq 0$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + \sqrt{t}$ trên đoạn $[0; +\infty)$. Ta có $f'(t) = 2t + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

Hệ phương trình tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} 2y = f(x) \\ 2x = f(y) \end{cases} \Rightarrow 2(y-x) = f(x) - f(y)$$

Do $f(t)$ là hàm đồng biến nên, nếu $y \geq x \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ và nếu $y \leq x \Rightarrow f(x) \geq f(y)$. Vậy $x = y$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 + \sqrt{x} = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x + \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(x + \sqrt{x} - 1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x, y) = (1,1); \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x-1)\left(y^2 + 6\right) = y\left(x^2 + 1\right) \\ (y-1)\left(x^2 + 6\right) = x\left(y^2 + 1\right) \end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} xy^2 + 6x - y^2 - 6 = yx^2 + y \\ yx^2 + 6y - x^2 - 6 = xy^2 + x \end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$(x-y)(x+y-2xy+7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x + y - 2xy + 7 = 0 \end{array} \right.$$

(i). Nếu $x = y$ khi đó ta có hệ $\begin{cases} x = y \\ xy^2 + 6x - y^2 - 6 = yx^2 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 2 \\ x = y = 3 \end{array} \right.$

(ii). Nếu $x + y - 2xy + 7 = 0$, khi đó cộng theo vế hai phương trinh của hệ ta được

$x^2 + y^2 - 5(x+y) + 12 = 0$.

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5(x+y) + 12 = 0 \\ x + y - 2xy + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 5(x+y) - 2xy + 12 = 0 \\ x + y - 2xy + 7 = 0 \end{cases}$

Đặt $S = x + y, P = xy; S^2 \geq 4P$ khi đó hệ trở thành

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} S^2-5S-2P+12=0 \\ S-2P+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2-6S+5=0 \\ P=\dfrac{S+7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=1, P=4 \\ S=5, P=6 \end{array}\right.$$

Chỉ nhận nghiệm $\begin{cases} S=5 \\ P=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2; y=3 \\ x=3; y=2 \end{array}\right.$

Vậy hệ có bốn nghiệm là $(2,2);(3,3);(3,2);(2,3)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau :

<u>Hệ đối xứng loại 1 :</u>

Bài 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^4+y^4+6x^2y^2=41 \\ xy\left(x^2+y^2\right)=10 \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^4+y^4+x^2y^2=21 \end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^4+y^4+x^2y^2=91 \end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x+y=4 \\ \left(x^2+y^2\right)\left(x^3+y^3\right)=280 \end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2y^2}\right)=49 \\ \left(x+y\right)\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)=5 \end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2} \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4 \end{cases}$

Bài 7. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=12 \\ x(x-1)y(y-1)=36 \end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} (x+y)(1+xy)=18xy \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+x^2y^2\right)=208x^2y^2 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 9. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)(x+y)=15 \\ \left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}\right)(x^2+y^2)=85 \end{cases}$

Bài 10. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^3+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2=12 \\ (xy)^2+xy=6 \end{cases}$

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4xy+4(x^2+y^2)+\dfrac{3}{x^2+y^2}=7 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=3 \end{cases}$

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x+y=3 \\ \dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{1}{y^2+2y}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

<u>Hệ đối xứng loại 2 :</u>

Bài 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3y=\dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x=\dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ 2y=x^3+1 \end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3=3x+8y \\ y^3=3y+8x \end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{2} \\ \sqrt{y}+\sqrt{2-x}=\sqrt{2} \end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3+7x=y^3+7y \\ x^2+y^2=x+y+2 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x^2+21} = \sqrt{y-1} + y^2 \\ \sqrt{y^2+21} = \sqrt{x-1} + x^2 \end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x^2+3} + 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{y^2+3} + 2\sqrt{y} - \sqrt{x} = 3 \end{cases}$

Bài 9. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2 + x - \dfrac{1}{y} = 2 \\ y - y^2x - 2y^2 = -2 \end{cases}$

Bài 10. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 - x + 1 = x^2 - 2xy - y^2 \\ y^3 - 3x^2y + y + 1 = y^2 - 2xy - x^2 \end{cases}$

HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

Phương pháp :

Xét xem hệ phương trình có nghiệm $x = 0$ hoặc $y = 0$ hay không, xét $x \neq 0$, khi đó đặt $y = tx$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2y\left(x^2 - y^2\right) = 3x \\ x\left(x^2 + y^2\right) = 10y \end{cases}$$

Lời giải :

Nhận thấy $x = 0, y = 0$ là một nghiệm của hệ. Xét $x \neq 0$, đặt $y = tx$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} 2tx\left(x^2 - t^2x^2\right) = 3x \\ x\left(x^2 + t^2x^2\right) = 10tx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2tx^2\left(1 - t^2\right) = 3 \\ x^2\left(1 + t^2\right) = 10t \end{cases}$$

Từ đó suy ra $2t\left(1-t^2\right).10t = 3.\left(1+t^2\right) \Leftrightarrow 20t^2 - 20t^4 = 3 + 3t^2$

$$\Leftrightarrow 20t^4 - 17t^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{5}; t = \frac{1}{4}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

(i). Với $t=\frac{3}{5}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{3}{5}x\\x^2\left(1+t^2\right)=10t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{5\sqrt{85}}{17}\\y=\pm\frac{3\sqrt{85}}{17}\end{cases}$

(ii). Với $t=\frac{1}{4}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{4}x\\x^2\left(1+t^2\right)=10t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{2\sqrt{170}}{17}\\y=\pm\frac{\sqrt{170}}{34}\end{cases}$

Vậy hệ có năm nghiệm là $(x,y)=(0,0),\left(\pm\frac{5\sqrt{85}}{17},\pm\frac{3\sqrt{85}}{17}\right);\left(\pm\frac{2\sqrt{170}}{17},\pm\frac{\sqrt{170}}{34}\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2-3xy+y^2=-1\\x^2+2xy-2y^2=1\end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ, đặt $x=ty$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases}y^2\left(t^2-3t+1\right)=-1\\y^2\left(t^2+2t-2\right)=1\end{cases}$$

Chia theo vế hai phương trình của hệ, ta được

$$\frac{t^2-3t+1}{t^2+2t-2}=-1\Leftrightarrow 2t^2-t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

(i). Với $t=1\Rightarrow\begin{cases}x=y\\y^2\left(t^2-3t+1\right)=-1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=\pm1$

(ii). Với $t=-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}y\\y^2\left(t^2-3t+1\right)=-1\end{cases}$ hệ này vô nghiệm

Bài 3. Giải hệ phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} 2x^2 - x(y-1) + y^2 = 3y \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 3y - x \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y \end{cases}$$

Nếu $y = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của hệ.

Xét $y \neq 0$, đặt $x = ty$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} y^2\left(2t^2 - t + 1\right) = y(3-t) \\ y^2\left(t^2 + t - 3\right) = y(t-2) \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\left(2t^2 - t + 1\right)(t-2) = (3-t)\left(t^2 + t - 3\right) \Leftrightarrow 3t^3 - 7t^2 - 3t + 7 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(t^2 - 1\right)(3t - 7) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1, t = \frac{7}{3}$$

Thế ngược trở lại hệ đã cho tìm được các nghiệm là $(x, y) = (0,0), (1,1), (-1,1), \left(\frac{7}{43}, \frac{3}{43}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3\left(y^2 + 1\right) \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 8x + 2y \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$$

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, đặt $y = tx$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x^3\left(1 - t^3\right) = (2t + 8)x \\ x^2\left(1 - 3t^2\right) = 6 \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ đây suy ra $6\left(1-t^3\right)=\left(2t+8\right)\left(1-3t^2\right)\Leftrightarrow 12t^2-t-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{3} \\ t=-\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

(i). Với $t=\dfrac{1}{3}\Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{3}x \\ x^2\left(1-3t^2\right)=6 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 1 \end{cases}$

(ii). Với $t=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{x}{4} \\ x^2\left(1-3t^2\right)=6 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{4\sqrt{78}}{13} \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{78}}{13} \end{cases}$

Vậy hệ có bốn nghiệm là $\left(x,y\right)=\left(3,1\right);\left(-3,-1\right);\left(\dfrac{4\sqrt{78}}{13},-\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right);\left(\dfrac{-4\sqrt{78}}{13},\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau:

Bài 1. Giải phương trình: $\begin{cases} 3x^2-2xy=16 \\ x^2-3xy-2y^2=8 \end{cases}$

Bài 2. Giải phương trình: $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9 \\ 2x^2-13xy+15y^2=0 \end{cases}$

Bài 3. Giải phương trình: $\begin{cases} 2x+y=\dfrac{3}{x^2} \\ 2y+x=\dfrac{3}{y^2} \end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+y^2x=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ 4x^4+y^4=4x+y \end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(x-y\right)\left(x^2-y^2\right)=3 \\ \left(x+y\right)\left(x^2+y^2\right)=15 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3+3y=y^3+4x \\ 5\left(1+3y^2\right)=4\left(3x^2+2\right) \end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-3x^2y-2y=0 \\ x+3y-2y^3=0 \end{cases}$

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=2 \\ \dfrac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\dfrac{7}{4} \end{cases}$

DẠNG TOÁN CỘNG, TRỪ THEO VẾ CÁC PHƯƠNG TRÌNH TRONG HỆ

(PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH)

- Đôi khi việc giải hệ phương trình, đơn giản nhất chỉ là cộng hoặc trừ theo vế 2 phương trình của hệ.

- Nâng cao hơn thì nhân vào hai vế của một phương trình với một biểu thức rồi cộng vào phương trình còn lại của hệ.

Các cách trên sẽ đưa về một phương trình tích(hay là các hằng đẳng thức) và ta dễ dàng tìm ra mối liên hệ giữa x và y.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3-y^3=35 & (1) \\ 2x^2+3y^2=4x-9y & (2) \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Phân tích:

Lấy $(1)+\alpha.(2)$ ta được:

$$x^3-y^3-35+\alpha\left(2x^2+3y^2-4x+9y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+2\alpha x^2-4\alpha x-y^3+3\alpha y^2+9\alpha y-35=0$$

Ta sẽ chọn các số $a,b,\alpha\in\mathbb{R}$ sao cho:

$$x^3+2\alpha x^2-4\alpha x-y^3+3\alpha y^2+9\alpha y-35=\left(x+a\right)^3-\left(y+b\right)^3$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^3-b^3=-35\\3a=2\alpha\\3a^2=-4\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-3\\a=-2\\b=3\end{cases}$$

Vậy đi đến lời giải cho bài toán này như sau:

Lấy phương trình (1) trừ đi 3 lần phương trình(2) ta được: $\left(x-2\right)^3=\left(3+y\right)^3\Rightarrow x=y+5\ \ (3)$

Thế (3) vào phương trình (2) của hệ ta được : $y^2+5y+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2\Rightarrow x=3\\y=-3\Rightarrow x=2\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(3,-2\right),\left(2,-3\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x^3+y^3=91 & (1)\\4x^2+3y^2=16x+9y & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Lấy phương trình (1) trừ đi 3 lần phương trình (2) theo vế ta được:

$\left(x-4\right)^3=\left(3-y\right)^3\Rightarrow x=7-y\quad(3)$.

Thay (3) vào phương trình (2) của hệ ta được

$$y^2-7y+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=4\Rightarrow x=3\\y=3\Rightarrow x=4\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(3,4\right),\left(4,3\right)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 3. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 & (1) \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Lấy phương trình (1) cộng theo vế với 3 lần phương trình (2) ta được

$$x^3+xy^2+3x^2-24xy+3y^2=-49+24y-51x$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left((x+1)^2+3(y-4)^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1;\, y=-4 \\ x=-1;\, y=4 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(-1,-4),(-1,4)$

Bài 4. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{5} & (1) \\ 4x^2+3x-\dfrac{57}{25}=-y(3x+1) & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Lấy 25 lần phương trình (1) cộng theo vế với 50 lần phương trình (2) ta được

$$25(3x+y)^2+50(3x+y)-119=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+y=\dfrac{7}{5} \\ 3x+y=-\dfrac{17}{5} \end{array}\right.$$

Giải ra ta được nghiệm của hệ là $\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{5}\right),\left(\dfrac{11}{25},\dfrac{2}{25}\right)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+3x=0 & (1) \\ xy+y^2+3y+1=0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Lấy phương trình (1) cộng theo vế với 2 lần phương trình (2) ta được:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$(x+2y)^2+3(x+2y)+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2y=-1\\x+2y=-2\end{array}\right.$$

+ Với $x+2y=-1$, thay vào (2) ta được: $y^2-2y-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1+\sqrt{2}\Rightarrow x=-3-2\sqrt{2}\\y=1-\sqrt{2}\Rightarrow x=-3+2\sqrt{2}\end{array}\right.$

+ Với $x+2y=-2$, thay vào (2) ta được:

$$y^2-y-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=-3+\sqrt{5}\\y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=-3-\sqrt{5}\end{array}\right.$$

Vậy hệ có 4 nghiệm

$$\left(-3\pm\sqrt{2};1\mp\sqrt{2}\right),\left(-3\pm\sqrt{5};\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}\right).$$

Bài 6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}6x^2y+2y^3+35=0 & (1)\\5(x^2+y^2)+2xy+5x+13y=0 & (2)\end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Lấy phương trình (1) cộng với 3 lần phương trình (2) ta được

$$(6y+15)x^2+3(2y+5)x+2y^3+15y^2+39y+35=0$$

$$\Leftrightarrow(2y+5)\left(3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\\x=-\dfrac{1}{2};y=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+2y^2=xy+2y & (1)\\2x^3+3xy^2=2y^2+3x^2y & (2)\end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

+ Với $y=0 \Rightarrow x=0$ là một nghiệm của hệ.

+ Xét $y \neq 0$, nhân vào 2 vế của (1) với $-y$ sau đó cộng theo vế với phương trình (2) ta được

$2x^3-2y^3-4x^2y+4xy^2=0 \Leftrightarrow x=y \quad (3)$.

Thay (3) vào phương trình (1) ta được: $2y^2=2y \Leftrightarrow y=1 \quad (y\neq 0) \Rightarrow x=1$.

Vậy nghiệm của hệ là $(0;0),(1;1)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 & (1) \\ x^2+2xy-7x-5y+9=0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Cộng theo vế 2 phương trình của hệ ta được: $(x+y-2)(2x+y-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-2=0 \\ 2x+y-3=0 \end{array}\right.$

❖ Với $x+y-2=0$ khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ x^2+x(2-x)+(2-x)^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

❖ Với $2x+y-3=0$ khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2x \\ x^2+x(3-2x)+(3-2x)^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1);(2;-1)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau:

1.1. $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x^2+2y^2=x+4y \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.2. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 91 \\ 4x^2 + 3y^2 = 16x + 9y \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 3x^2 + 2xy = 3y - 16 \\ 2y^2 + 3xy = 2x + 12 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3\left(x^2 - 4y^2\right) - 4\left(x - 8y\right) \end{cases}$

Gợi ý: Nhân vào hai vế phương trình thứ hai với (-8) rùi cộng theo vế với phương trình thứ nhất của hệ.

DẠNG TOÁN BIẾN ĐỔI VÀ ĐẶT ẨN PHỤ

Áp dụng với hệ có số hạng chung xuất hiện ở các phương trình trong hệ.

Thường thì các bài toán biến đổi đơn giản ta đặt ẩn phụ với $\begin{cases} u = x \pm y \\ v = xy \end{cases}$

Chẳng hạn:

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + x^2y + y^3 = 4 \\ \left(x + y\right)\left(x^2 + xy + y^2\right) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + y\right)\left(\left(x + y\right)^2 - 2xy\right) = 4 \\ \left(x + y\right)\left(\left(x + y\right)^2 - xy\right) = 6 \end{cases}$$

Ta đặt ẩn phụ như sau: $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$ khi đó được hệ mới: $\begin{cases} u\left(u^2 - 2v\right) = 4 \\ u\left(u^2 - v\right) = 6 \end{cases}$ đơn giản hơn nhiều.

Đôi khi chia(hoặc nhân) hai vế của phương trình trong hệ với một biểu thức nào đó của biến(thường đơn giản là $x, x^2, x^3; y, y^2, y^3$*) lúc này sẽ được hệ mới có thể đặt ẩn phụ được.*

Chẳng hạn:

$$\begin{cases} x^2 + xy - 3x + y = 0 \\ x^4 + 3x^2y - 5x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Mới đầu nhìn hệ này chưa có gì đặc biệt tuy nhiên, với $x \neq 0$ ta chia hai vế của phương trình đầu cho x và chia hai vế của phương trình thứ hai cho x^2 ta được hệ mới như sau:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{x}+y-3=0 \\ x^2+\dfrac{y^2}{x^2}+3y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}+y-3=0 \\ \left(x+\dfrac{y}{x}\right)^2+y-5=0 \end{cases}$$

Đến đây ta đặt $u=x+\dfrac{y}{x};v=y-3$

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} u+v=0 \\ u^2+v-2=0 \end{cases}$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=xy+x+y & (1) \\ x^2-y^2=3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có $x^2+y^2-xy=\dfrac{1}{4}\left((x+y)^2+3(x-y)^2\right)$.

Vậy đặt $a=x+y;b=x-y$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} a^2+3b^2=4a \\ ab=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b^4-12b+9=0 \\ a=\dfrac{3}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(b-1)^2(b^2+2b+3)=0 \\ a=\dfrac{3}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(2;1)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+6}=y+1 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$$

Lời giải:

+ Điều kiện $y\ge -1$, khi đó hệ tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^2+2x+6=y^2+2y+1 \\ \frac{1}{4}\left((x-y)^2+3(x+y)^2\right)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2(x-y)+5=0 \\ \frac{1}{4}\left((x-y)^2+3(x+y)^2\right)=28 \end{cases}$$

Đặt $a=x+y; b=x-y$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} ab+2b+5=0 \\ 3a^2+b^2=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$$

+ Với $\begin{cases} a=-1 \\ b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

+ Với $\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$(thỏa mãn điều kiện).

Vậy nghiệm của hệ là $(1;2),(-3;2)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2)+\frac{1}{(x-y)^2}=2(10-xy) \\ 2x+\frac{1}{x-y}=5 \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

+ Điều kiện $x\neq y$ (*)

+ Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)^2+(x-y)^2+\frac{1}{(x-y)^2}=20 \\ x+y+x-y+\frac{1}{x-y}=5 \end{cases}$

Đặt $u=x+y;\quad v=x-y+\frac{1}{x-y}\,(|v|\geq 2)$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} 2u^2+v^2-2=20 \\ u+v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5-v \\ 3v^2-20v+28=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \vee \begin{cases} u=\frac{1}{3} \\ v=\frac{14}{3} \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

+ Với $\begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y+\dfrac{1}{x-y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

+ Với $\begin{cases} u=\dfrac{1}{3} \\ v=\dfrac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{1}{3} \\ x-y+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{14}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4\pm\sqrt{10}}{3} \\ y=\dfrac{-3\mp\sqrt{10}}{3} \end{cases}$

Vậy hệ có 3 nghiệm là $(2;1),\left(\dfrac{4\pm\sqrt{10}}{3};\dfrac{-3\mp\sqrt{10}}{3}\right)$

Bài 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4+4x^2+y^2-4y=2 \\ x^2y+2x^2+6y=23 \end{cases}$$

Lời giải:

+ Đặt $t=y^2$, khi đó hệ trở thành

$\begin{cases} t-4y=2-x^4-4x^2 \\ \left(x^2+6\right)y=23-2x^2 \end{cases}$, ta coi x là hằng số khi đó ta được hệ đơn giản với 2 ẩn là t,y.

Ta có: $D=x^2+6; D_t=-x^6-10x^4-30x^2+104; D_y=23-2x^2$

Ta có $t=y^2 \Rightarrow \dfrac{D_t}{D}=\left(\dfrac{D_y}{D}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2+6\right)\left(-x^6-10x^4-30x^2+104\right)=\left(23-2x^2\right)^2$

$$\Leftrightarrow (1-x)(1+x)(1+x^2)(x^4+16x^2+95)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=3 \\ x=-1 \Rightarrow y=3 \end{array}\right.$$

Bài 5.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 9y^3(3x^3-1)=-125 & (1) \\ 45x^2y+75x=6y^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Nhận thấy $x=0\vee y=0$, không là nghiệm của hệ, khi đó chia 2 vế của phương trình (1) cho y^3; và chia 2 vế của phương trình (2) cho y^2 ta được

$$\begin{cases}27x^3+\dfrac{125}{y^3}=9\\ 45\dfrac{x^2}{y}+75\dfrac{x}{y^2}=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}27x^3+\dfrac{125}{y^3}=9\\ 15\dfrac{x}{y}(3x+\dfrac{5}{y})=6\end{cases}$$

Đặt $u=3x;v=\dfrac{5}{y}$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases}u^3+v^3=9\\ uv(u+v)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+v)^3-3uv(u+v)=9\\ uv(u+v)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3\\ uv=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases}\vee\begin{cases}u=1\\ v=2\end{cases}$$

\+ Với $\begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2\\ \dfrac{5}{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ y=5\end{cases}$

\+ Với $\begin{cases}u=1\\ v=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=1\\ \dfrac{5}{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

Vậy hệ có 2 nghiệm là $\left(\dfrac{2}{3};5\right),\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{2}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x(1+x)+\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1}{y}+1\right)=4\\ x^3y^3+y^2x^2+xy+1=4y^3\end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

\+ Điều kiện $y\neq 0$.

$$HPT\Leftrightarrow\begin{cases}x+x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{y}=4\\ x^3+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{y^3}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^2-2\dfrac{x}{y}=4\\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^3-2\dfrac{x}{y}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=4\end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $u = x + \frac{1}{y}; v = \frac{x}{y}$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} u + u^2 - 2v = 4 \\ u^3 - 2uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2v = 4 - u - u^2 \\ u^3 + u(4 - u - u^2) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2v = 4 - u - u^2 \\ (u-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3(3y + 55) = 64 \\ xy(y^2 + 3y + 3) = 12 + 51x \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Nhận thấy $x = 0$, không là nghiệm của hệ, khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases} 3y + 55 = \frac{64}{x^3} \\ y^3 + 3y^2 + 3y = \frac{12}{x} + 51 \end{cases}$$

Đặt $t = \frac{4}{x} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 55 = t^3 (1) \\ y^3 + 3y^2 + 3y = 3t + 51 (2) \end{cases}$, cộng theo vế của (1) và (2) ta được

$$y^3 + 3y^3 + 6y + 55 = t^3 + 3t + 51 \Leftrightarrow (y+1)^3 + 3(y+1) = t^3 + 3t + 51$$

$\Leftrightarrow f(t) = f(y+1)$, trong đó $f(t) = t^3 + 3t + 51 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \Rightarrow f \uparrow$

Vậy $f(t) = f(y+1)$ khi và chỉ khi $t = y + 1$, khi đó thay $y = t - 1$ vào (1) ta được

$$t^3 - 3t - 52 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t^2 + 4t + 13) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{x} = 4 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3$$

Vậy hệ có nghiệm $(1;3)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^3(2+3y)=1 & (1) \\ x(y^3-2)=3 & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

+ Nhận thấy $x=0$, không là nghiệm của hệ, khi đó chia 2 vế của (1) cho x^3và chia 2 vế của (2) cho x, hệ trở thành

$$\begin{cases} 2+3y=\dfrac{1}{x^3} \\ y^3-2=\dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+3y=\dfrac{1}{x^3} \\ 2+\dfrac{3}{x}=y^3 \end{cases}, \text{ đặt } \begin{cases} u=y \\ v=\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=y=1 \\ u=y=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(1;1);\left(\dfrac{1}{2};2\right)$

Bài 9. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+1+y(x+y)=4y & (1) \\ (x^2+1)(x+y-2)=y & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

+ Nhận thấy $y=0$, không là nghiệm của hệ, nên ta chia cả 2 vế của (1) và (2) cho y ta được

$$+HPT \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+(x+y)=4 \\ \dfrac{x^2+1}{y}(x+y-2)=1 \end{cases}, \text{ đặt } u=\dfrac{x^2+1}{y}; v=x+y-2 \Rightarrow \text{hệ trở thành}$$

$$\begin{cases} u+v=2 \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$$

Bài 10. Giải hệ phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3\\ 2xy+y^2+1=8y\end{cases}$$

Lời giải:

Chia 2 vế của (2) cho y ta được

$+HPT \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3\\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=8\end{cases}$, đặt $u=\sqrt{x+\dfrac{1}{y}};v=\sqrt{x+y-3}\Rightarrow$ hệ trở thành

$$\begin{cases}u+v=3\\ u^2+v^2+3=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3\\ uv=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=2;v=1\\ u=1;v=2\end{array}\right.$$

$$+\begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}=2\\ \sqrt{x+y-3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\mp\sqrt{2}\\ y=-1\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

$$+\begin{cases}u=1\\ v=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}=1\\ \sqrt{x+y-3}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\mp\sqrt{10}\\ y=3\pm\sqrt{10}\end{cases}$$

Bài 11. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}(x-2011)\left(2011+2012\sqrt[3]{y-2013}\right)=1\\ \sqrt[3]{x-2010}\,(y-4024)=2012\end{cases}$$

Lời giải :

Đặt $u=\sqrt[3]{x-2010}, v=\sqrt[3]{y-2013}$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases}(u^3-1)(2011-2012v)=1\\ u(v^3-2011)=2012\end{cases}$$

Trừ theo vế hai phương trình của hệ, ta được

$$2011u^3+2012u^3v+2011u-uv^3-2012v=0\Leftrightarrow u=v=0\Leftrightarrow x=2010, y=2013$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ có nghiệm là $(x;y)=(2010;2013)$

Bài 12. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3x}+\dfrac{2x}{3y}=\dfrac{x+\sqrt{y}}{2x^2+y}\\ 2\left(2x+\sqrt{y}\right)=\sqrt{2x+6}-y\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải :

Điều kiện : $-3\le x\ne 0; y>0$.

Khi đó ta đặt $\sqrt{y}=kx\Leftrightarrow\begin{cases}kx>0\\ y=k^2x^2\end{cases}$

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành :

$$\frac{1}{3x}+\frac{2x}{3k^2x^2}=\frac{x+kx}{2x^2+k^2x^2}\Leftrightarrow(k-2)^2\left(k^2+k+1\right)=0\Leftrightarrow k=2$$

Với $k=2$ ta có $\sqrt{y}=2x\Rightarrow x>0$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$4x^2+8x=\sqrt{2x+6}\Leftrightarrow(2x+2)^2-4=\sqrt{2x+6}$$

Đặt $\sqrt{2x+6}=2t+2$, khi đó ta có hệ

$$\begin{cases}2x+6=(2t+2)^2\\ (2x+2)^2-4=2t+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+6=(2t+2)^2\\ (x-t)(1+2x+2t+4)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}\\ y=\dfrac{13-3\sqrt{17}}{2}\end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4},\dfrac{13-3\sqrt{17}}{2}\right)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}(x+y-3)^3=4y^3\left(x^2y^2+xy+\dfrac{45}{4}\right)\\ x+4y-3=2xy^2\end{cases}$$

Lời giải :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

❖ Xét $y=0\Rightarrow\begin{cases}(x-3)^3=0\\x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3\Rightarrow(3,0)$ là một nghiệm của hệ.

❖ Xét $y\neq 0$, khi đó chia hai vế của phương trình thứ nhất của hệ cho y^3 và chia hai vế của hệ cho y, ta được:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}+1-\dfrac{3}{y}\right)^3=4\left(x^2y^2+xy+\dfrac{45}{4}\right)\\\dfrac{x}{y}+4-\dfrac{3}{y}=2xy\end{cases}$$

Đặt $u=\dfrac{x}{y}+1-\dfrac{3}{y},v=xy$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases}u^3=4\left(v^2+v+\dfrac{45}{4}\right)\\u+3=2v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^3=4\left(\left(\dfrac{u+3}{2}\right)^2+\dfrac{u+3}{2}+\dfrac{45}{4}\right)\\v=\dfrac{u+3}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u^3-u^2-8u-60=0\\v=\dfrac{u+3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u-5)\left(u^2+4u+12\right)=0\\v=\dfrac{u+3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=5\\v=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{y}+1-\dfrac{3}{y}=5\\xy=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1}{2}\left(-3\mp\sqrt{105}\right)\\y=\dfrac{-3\pm\sqrt{105}}{12}\end{cases}$$

Vậy hệ có ba nghiệm là $(x;y)=(3;0);\left(\dfrac{-1}{2}\left(-3\mp\sqrt{105}\right);\dfrac{-3\pm\sqrt{105}}{12}\right)$

Bài 14. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+\sqrt{y-1}=6\\\sqrt{x^2+2x+y}+2x\sqrt{y-1}+2\sqrt{y-1}=29\end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện: $y\geq 1$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $a=\sqrt{y-1}\Rightarrow y=a^2+1$, khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}x+a=6\\ \sqrt{x^2+2x+a^2+1}+2(x+1)a=29\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1+a=7\\ \sqrt{(x+1)^2+a^2}+2(x+1)a=29\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x+1)^2+a^2+2(x+1)a=49 & (1)\\ \sqrt{(x+1)^2+a^2}+2(x+1)a=29 & (2)\end{cases}$$

Lấy phương trình (1) trừ theo vế cho phương trình (2), ta được:

$$(x+1)^2+a^2-\sqrt{(x+1)^2+a^2}-20=0\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+a^2}=5>0\Rightarrow(x+1)^2+a^2=25$$

Vậy ta có hệ

$$\begin{cases}x+a=6\\ (x+1)^2+a^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2;a=4\\ x=3;a=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2;y=17\\ x=3;y=10\end{array}\right.$$

Thử lại thấy hai nghiệm này đều thỏa mãn

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(2,17);(3,10)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x^2+xy-3x+y=0\\ x^4+3x^2y-5x^2+y^2=0\end{cases}$$

Lời giải :

Nhận thấy $(x;y)=(0;0)$ là một nghiệm của hệ phương trình

Xét $x\neq 0$, khi đó chia hai vế của phương trình thứ nhất cho x và chia hai vế của phương trình thứ hai cho x^2 ta được hệ

$$\begin{cases}x+\dfrac{y}{x}+y-3=0\\ x^2+\dfrac{y^2}{x^2}+3y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{y}{x}+y-3=0\\ \left(x+\dfrac{y}{x}\right)^2+y-5=0\end{cases}$$ đến đây ta đặt $u=x+\dfrac{y}{x};v=y-3$

Khi đó hệ trở thành

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} u+v=0 \\ u^2+v-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=-u \\ u^2-u-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=-1 \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=2 \\ v=-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=-1 \\ y-3=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+\dfrac{y}{x}=2 \\ y-3=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x;y)=(0;0);(1;1)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2+x+xy-6y+1=0 \\ y^3x-9y^2+x^2y+x=0 \end{cases}$

Lời giải:

Nhận thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ, nên với $y\neq 0$ ta chia hai vế của phương trình thứ nhất của hệ cho y và hai vế của phương trình thứ hai của hệ cho y^2, ta được

$$\begin{cases} \dfrac{x+y^2}{y}+\dfrac{xy+1}{y}=6 \\ \dfrac{x+y^2}{y}.\dfrac{xy+1}{y}=9 \end{cases}$$

Vậy ta đặt $u=\dfrac{x+y^2}{y};v=\dfrac{xy+1}{y}$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} u+v=6 \\ uv=9 \end{cases} \Leftrightarrow u=v=3 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y^2}{y}=3 \\ \dfrac{xy+1}{y}=3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-y^2 \\ x=3-\dfrac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)^3=0 \\ x=3-\dfrac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;1)$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 17. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\left(x^2+x\right)y^2-4y^2+y+1=0\\ xy+x^2y^2+1-\left(4-x^3\right)y^3=0\end{cases}$

Lời giải :

Hệ tương đương với

$$\begin{cases}\left(x^2+x\right)y^2+y+1=4y^2\\ xy+x^2y^2+1+x^3y^3=4y^3\end{cases}$$

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ, nên với $y\neq 0$ ta chia hai vế của phương trình thứ nhất cho y^2 và chia hai vế của phương trình thứ hai cho y^3

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{xy+1}{y}=4\\ \left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)\left(\dfrac{xy+1}{y}\right)=4\end{cases}$$

Ta đặt $\begin{cases}u=x^2+\dfrac{1}{y^2}\\ v=\dfrac{xy+1}{y}\end{cases}$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases}u+v=4\\ uv=4\end{cases}\Leftrightarrow u=v=2\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{xy+1}{y}=2\\ x^2+\dfrac{1}{y^2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2(y+1)=6y-2\\ x^4y^2+2x^2y^2+y\left(x^2+1\right)=12y^2-1\end{cases}$

Lời giải :

Hệ tương đương với

$$\begin{cases}x^2(y+1)+2=6y\\ \left(x^4y^2+2x^2y^2+y^2\right)+y\left(x^2+1\right)=13y^2-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2(y+1)+2=6y & (1)\\ y^2\left(x^2+1\right)^2+y\left(x^2+1\right)+1=13y^2 & (2)\end{cases}$$

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình, nên với $y\neq 0$ ta chia hai vế phương trình (1) cho y và chia hai vế phương trình (2) cho y^2, ta được hệ mới

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{2}{y}=6 \\ \left(x^2+1\right)^2+\dfrac{x^2+1}{y}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1+\dfrac{1}{y}+\dfrac{x^2+1}{y}=7 \\ \left(x^2+1\right)^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x^2+1}{y}=13 \end{cases}$$

Đến đây ta đặt $S=x^2+1+\dfrac{1}{y};P=\dfrac{x^2+1}{y};\quad \left(S^2-4P\geq 0\right)$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} S+P=7 \\ S^2-P=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=7-S \\ S^2+S-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=4 \\ P=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1+\dfrac{1}{y}=4 \\ \dfrac{x^2+1}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+1=3 \\ \dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+1=1 \\ \dfrac{1}{y}=3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có ba nghiệm là $(x;y)=\left(\pm\sqrt{2};1\right);\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y\left(1+2x^3y\right)=3x^6 \\ 1+4x^6y^2=5x^6 \end{cases}$

Lời giải :

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ, với $x\neq 0$ ta chia hai vế của các phương trình trong hệ cho x^6 ta được hệ

$\begin{cases} \dfrac{y}{x^3}\left(\dfrac{1}{x^3}+2y\right)=3 \\ \dfrac{1}{x^6}+4y^2=5 \end{cases}$ đến đây ta đặt $a=\dfrac{y}{x^3};b=\dfrac{1}{x^3}+2y$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} ab=3 \\ b^2-4a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{b^2-5}{4} \\ b\left(\dfrac{b^2-5}{4}\right)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x^3}=1 \\ \dfrac{1}{x^3}+2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1,y=1 \\ x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}},y=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(1;1\right);\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}};\frac{1}{2}\right)$

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2-6=0 \\ \left(x+y-1\right)^2-\dfrac{4}{\left(x-y\right)^2}-3=0 \end{cases}$ $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Lời giải :

Diều kiện : $x\neq y$

Hệ tương đương với

$$\begin{cases} \left(x+y\right)\left(x-y\right)=6 \\ \left(x+y-1\right)^2-\dfrac{4}{\left(x-y\right)^2}-3=0 \end{cases}$$

Đặt $a=x+y;b=x-y$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} ab=6 \\ \left(a-1\right)^2-\dfrac{4}{b^2}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{6}{a} \\ a^2-2a+1-\dfrac{a^2}{9}-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{6}{a} \\ 8a^2-18a-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3;b=2 \\ a=-\dfrac{3}{4},b=-8 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-\dfrac{3}{4} \\ x+y=-8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2},y=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{35}{8},y=\dfrac{29}{8} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(x;y\right)=\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{35}{8};\frac{29}{8}\right)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.1. $\begin{cases} x^2+1+y^2+xy=4y \\ x+y-2=\dfrac{y}{x^2+1} \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x^3\left(6+21y\right)=1 \\ x\left(y^3-6\right)=21 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6 \\ \sqrt[6]{\left(x+y\right)^3\left(x-y\right)^2}=8 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3-xy \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=7-\dfrac{3x^2y^2+2}{xy} \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19\left(x-y\right)^2 \\ x^2-xy+y^2=7\left(x-y\right) \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x^3(2+3y)=8 \\ x\left(y^3-2\right)=6 \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} \log_x\left(\log_x y\right)=\log_y\left(\log_y x\right) \\ \lg^2 x+\lg^2 y=8 \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x+y^2-y\sqrt{x+3y^2}=0 \\ 2y^2-3y-x+1+\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+1}{21}}=0 \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} x^2-2xy+x+y=0 \\ x^4-4x^2y+3x^2+y^2=0 \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} x^4-2x=y^4-y \\ \left(x^2-y^2\right)^3=3 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.13. $\begin{cases} 8\left(x^2+y^2\right)+4xy+\dfrac{5}{(x+y)^2}=13 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1 \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 4x^2y+y^2+2=7xy \\ 2x^2+2y^2+3y^3=6xy^2 \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} (x-y)^2+x+y=y^2 \\ x^4-4x^2y+3x^2=-y^2 \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} xy(xy+2y+1)+y=6y^2-1 \\ xy+x=4y-2 \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} \dfrac{y(xy-1)}{y^2+1}=\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{x(xy-1)}{y^2+1}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=4y-1 \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} y^3=x^3\left(9-x^3\right) \\ x^2y+y^2=6x \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} \dfrac{1}{(x+y-1)^3}+\dfrac{1}{(x-y+1)^3}=2 \\ x^2+2x=y^2 \end{cases}$

ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG BẬC

<u>Phương pháp :</u>

Từ hai phương trình của hệ biến đổi và đưa về phương trình đồng bậc với biến x, y Giải phương trình x biểu diễn theo y rồi thế lại hệ bân đầu.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = 2\left(4\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) & (1) \\ x - 3y = 6 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Ý tưởng:

Nhận thấy vế trái của (1) có bậc là $\frac{3}{2}$, còn vế phải của (1) có bậc là $\frac{1}{2}$.Do đó nhân vào 2 vế của (1) với đa thức có bậc là 1 thì ta được đa thức đồng bậc. Lúc này ta có thể rút x theo y.

+ Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}(*)$

Thay $2 = \frac{1}{3}(x - 3y)$ từ (2) vào phương trình (1) ta được: $3(x\sqrt{x} - y\sqrt{y}) = (x - 3y)(4\sqrt{x} + \sqrt{y})$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(x + \sqrt{xy} - 12y\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + 4\sqrt{y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x} = 0 \\ \sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 9y \Rightarrow x = 9; y = 1.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(9;1)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - xy^2 = 1 & (1) \\ 4x^4 + y^4 - 4x - y = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Thay $1 = x^3 + y^3 - xy^2$ ở (1) vào (2) ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$4x^4 + y^4 - (4x+y)(x^3+y^3-xy^2) = 0$

$\Leftrightarrow 3xy^3 + x^3y - 4x^2y^2 = 0 \Leftrightarrow xy(3y^2 + x^2 - 4xy) = 0$

$\Leftrightarrow xy(y-x)(3y-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy = 0 \\ y = x \\ x = 3y \end{array}\right.$

+ Với $xy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

+ Với $y = x$, thay vào (1) ta được: $x = y = 1$.

+ Với $x = 3y$, thay vào (1) ta được: $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{25}} \Rightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt[3]{25}}$.

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm là

$(0;1),(1;0),(1;1),\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}};\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}\right)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3\left(y^2+1\right) \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Hệ phương trình tương đương với

$\begin{cases} x^3 - y^3 = 8x + 2y \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, đặt $y = tx$, khi đó hệ trở thành

$\begin{cases} x^3\left(1-t^3\right) = \left(2t+8\right)x \\ x^2\left(1-3t^2\right) = 6 \end{cases}$

Từ đây suy ra $6\left(1-t^3\right) = \left(2t+8\right)\left(1-3t^2\right) \Leftrightarrow 12t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{3} \\ t = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

(i). Với $t=\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{3}x\\x^2\left(1-3t^2\right)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm3\\y=\pm1\end{cases}$

(ii). Với $t=-\frac{1}{4}\Rightarrow\begin{cases}y=-\frac{x}{4}\\x^2\left(1-3t^2\right)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{4\sqrt{78}}{13}\\y=\pm\frac{\sqrt{78}}{13}\end{cases}$

Vậy hệ có bốn nghiệm là $(x,y)=(3,1);(-3;-1);\left(\frac{4\sqrt{78}}{13};-\frac{\sqrt{78}}{13}\right);\left(\frac{-4\sqrt{78}}{13};\frac{\sqrt{78}}{13}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+3y=x^2+3xy+y^2\\x^2+2y^2=x+2y\end{cases}$$

Lời giải:

Nhân theo vế hai phương trình của hệ ta được

$\left(2x+3y\right)\left(x^2+2y^2\right)=\left(x+2y\right)\left(x^2+3xy+y^2\right)\Leftrightarrow x^3+4y^3-3xy^2-2x^2y=0$

$\left(x-y\right)\left(x^2-xy-4y^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}y\end{array}\right.$

(i). Với $y=x$ thay vào phương trình thứ hai suy ra $3x^2=3x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=0\\x=y=1\end{array}\right.$

(ii). Với $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}y$, khi đó ta có hệ

$\begin{cases}x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}y\\x^2+2y^2=x+2y\end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}2x^2y^2+x^2+2x=2\\2x^2y-x^2y^2+2xy=1\end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}2x^2y^2+x^2+2x=2\\2x^2y-x^2y^2+2xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(xy)^2+(x+1)^2=3\\2xy(x+1)-(xy)^2=1\end{cases}$$

Đặt $u=x+1; v=xy$ khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases}u^2+2v^2=3\\2uv-v^2=1\end{cases}$$

Đặt $u=tv$, khi đó hệ trên trở thành :

$$\begin{cases}v^2(t^2+2)=3\\v^2(2t-1)=1\end{cases}\Rightarrow t^2+2=3(2t-1)\Leftrightarrow t^2-6t+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\\t=1\end{array}\right.$$

(i). Với $t=5\Rightarrow\begin{cases}u=5v\\u^2+2v^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=\frac{5}{3},v=\frac{1}{3}\\u=-\frac{5}{3},v=-\frac{1}{3}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\frac{5}{3}\\xy=\frac{1}{3}\end{cases}\vee\begin{cases}x+1=-\frac{5}{3}\\xy=-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{3},y=-2\\x=-\frac{8}{3},y=\frac{1}{8}\end{array}\right.$$

(ii). Với $t=1\Rightarrow\begin{cases}u=v\\u^2+2v^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v=1\\u=v=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=xy=1\\x+1=xy=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-2,y=\frac{1}{2}$

Vậy hệ có ba nghiệm là $(x,y)=\left(-2,\frac{1}{2}\right);\left(\frac{2}{3},-2\right);\left(-\frac{8}{3},\frac{1}{8}\right)$.

Phương pháp :

Hệ có nghiệm (a,b) thì đặt $\begin{cases}x=a+u\\y=b+v\end{cases}$ ta đưa về hệ đơn giản hơn, thường là hệ đẳng cấp ta đã biết cách giải :

Sau đây xem xét một bài toán nữa đưa được về hệ đẳng cấp

Bài 6. Giải hệ phương trình :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy+2y+x=2 \\ 2x^2-y^2-2y-2=0 \end{cases}$$

Lời giải :

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy+2y+x=2 \\ 2x^2-y^2-2y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y+1)^2+x(y+1)=3 \\ 2x^2-(y+1)^2=1 \end{cases}$$

Khi đó đặt $u=y+1$ và hệ trở thành

$\begin{cases} x^2+u^2+xu=3 \\ 2x^2-u^2=1 \end{cases}$ đây là hệ đẳng cấp.□

Bài 7. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x^2+2xy-7x-5y+9=0 \end{cases}$$

Lời giải :

Hệ này có nghiệm $(1,1)$

Đặt $\begin{cases} x=a+1 \\ y=b+1 \end{cases}$ khi đó hệ trở thành : $\begin{cases} a^2+b^2+ab=-3(a+b) \\ a^2+2ab=3(a+b) \end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3+3xy^2=-49 \\ x^2-8xy+y^2=8y-17x \end{cases}$$

Lời giải :

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ, nên đặt $y=tx$

Khi đó hệ trở thành

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^3\left(1+3t^2\right)=-49 \\ x^2\left(1-8t+t^2\right)=x\left(8t-7\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8t-7}{1-8t+t^2}=\dfrac{8t-7}{\left(t^2-16\right)-\left(8t-17\right)}=\dfrac{b}{a-b} \\ x^3=\dfrac{-49}{1+3t^2}=\dfrac{-49}{3\left(t^2-16\right)+49}=\dfrac{-49}{49+4a} \end{cases}$$

Trong đó $a=t^2-16, b=8t-17$

Từ đó suy ra : $\dfrac{b^3}{(a-b)^3}=\dfrac{-49}{49+3a} \Leftrightarrow 49\left(b^3+(a-b)^3\right)+3a=0$

$\Leftrightarrow a\left(49b^2-49b(a-b)+49(a-b)^2+3\right)=0 \Leftrightarrow a=0$

Suy ra $t^2=16 \Rightarrow x^3=-1 \Leftrightarrow x=-1 \Rightarrow y=\pm 4$.

Vậy hệ có hai nghiệm $(x,y)=(-1,4);(-1,-4)$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau :

1.1. $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ 1+y^2=5\left(1+x^2\right) \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 2x^3+3y=y^3+4x \\ 5\left(1+3y^2\right)=4\left(3x^2+2\right) \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 3x^3-y^3=\dfrac{1}{x+y} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

DẠNG TOÁN GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases}(2x^2+y)(x+y)+x(2x+1)=7-2y & (1)\\ x(4x+1)=7-3y & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Thế $7=4x^2+x+3y$ ở phương trình (2) vào phương trình (1) ta được

$(2x^2+y)(x+y)+x(2x+1)=4x^2+x+3y-2y$

$\Leftrightarrow (2x^2+y)(x+y)=2x^2+y \Leftrightarrow (2x^2+y)(x+y-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y-1=0\\ y+2x^2=0\end{array}\right.$

+ Với $x+y-1=0 \Rightarrow y=1-x$, thay vào (2) ta được: $2x^2-x-2=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4} \Rightarrow y=\dfrac{3\mp\sqrt{17}}{4}$.

+ Với $y+2x^2=0$, thay vào (2) ta được $2x^2-x+7=0 \Rightarrow VN$.

Vậy hệ có 2 nghiệm là : $(x,y)=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4},\dfrac{3\mp\sqrt{17}}{4}\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}x^3+7y=(x+y)^2+x^2y+7x+4 & (1)\\ 3x^2+y^2+8y+4=8x & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

Thế $4=8x-3x^2-y^2-8y$ ở phương trình (2) vào phương trình (1) ta được

$(x-y)(x^2+2x-15)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ x=-5\\ x=3\end{array}\right.$

+ Với $x=y$, thay vào phương trình (2) ta được: $4+2x^2=0 \Rightarrow VN$

+ Với $x=-5$, thay vào (2) ta được: $y^2+8y+119=0 \Rightarrow VN$

+ Với $x=3$, thay vào (2) ta được: $y^2+8y+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=-7\end{array}\right.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy nghiệm của hệ là: $(x,y)=(3;-1),(3;-7)$

Bài 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2(y+1)=6y-2 & (1) \\ x^4y^2+2x^2y^2+y(x^2+1)=12y^2-1 & (2) \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Nhận thấy $y=-1$, không là nghiệm của hệ, xét $y\neq -1$khi đó rút $x^2=\frac{6y-2}{y+1}$ từ (1) thế vào (2), ta được:

$$\left(\frac{6y-2}{y+1}\right)^2 y^2+2y^2\frac{6y-2}{y+1}+y\left(\frac{6y-2}{y+1}+1\right)=12y^2-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(y-1)(9y+1)y^2}{(y+1)^2}=y-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ (9y+1)y^2=(y+1)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ y=\frac{1}{3}\Rightarrow x=0 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 3 nghiệm là

$(x,y)=\left(0;\frac{1}{3}\right),\left(\pm\sqrt{2};1\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} y^2-xy+1=0 & (1) \\ x^2+y^2+2x+2y+1=0 & (2) \end{cases}$$

<u>Lời giải:</u>

Thay $y^2+1=xy$ từ phương trình (1) vào phương trình (2), ta được

$$x^2+xy+2(x+y)=0 \Leftrightarrow (x+y)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

- Với $y=-x$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases} x^2+x^2+1=0 \\ x^2+x^2+1=0 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

- Với $x=-2$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases} y^2+2y+1=0 \\ y^2+2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-1$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-2;-1)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy=x+7y+1 & (1) \\ x^2y^2=10y^2-1 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Từ phương trình (1), rút $x=\dfrac{7y+1}{y-1}$ thay vào phương trình (2) ta được

$$\left(\frac{7y+1}{y-1}\right)^2 y^2=10y^2-1 \Leftrightarrow 39y^4+34y^3-8y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \Rightarrow x=3 \\ y=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=1 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(3,-1);\left(1;-\dfrac{1}{3}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+xy+2x+2y=16 \\ (x+y)(4+xy)=32 \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải:

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+y)(x+2)=16 & (1) \\ (x+y)(4+xy)=32 & (2) \end{cases}$$

+ Nhận thấy $x=-2$ không là nghiệm của hệ, nên chia 2 vế của (1) cho $x+2$ ta được

$x+y=\dfrac{16}{x+2}$, thay vào (2) ta được:

$$\frac{16(4+xy)}{x+2}=32 \Leftrightarrow 4+xy=2(x+2) \Leftrightarrow x(y-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=8 \\ y=2 \Rightarrow x=2 \vee x=-6 \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 3 nghiệm là $(x,y)=(0;8),(2;2),(2;-6)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-1)^2+6(x-1)y+4y^2=20\\ x^2+(2y+1)^2=2\end{cases}(x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải:

Hệ tương đương với

$$\begin{cases}x^2-2x+1+6xy-6y+4y^2=20 & (1)\\ x^2+4y^2+4y+1=2 & (2)\end{cases}$$

Thay $x^2+4y^2=1-4y$ từ phương trình (2) vào phương trình (1), ta được

$-2x+1+1-4y+6xy-6y=20\Rightarrow y=\dfrac{x+9}{3x-5}$, thay vào (2) ta được

$$x^2+\left(\frac{2x+18}{3x-5}+1\right)^2=2\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=-1$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(-1,-1)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+2xy^2=5 & (1)\\ 2x^2+xy+y^2=4x+y & (2)\end{cases}$

Lời giải:

Nhận thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình, với $x\neq 0$ rút $y^2=\dfrac{5-x^3}{2x}$ từ phương trình (1) và thay vào phương trình (2) ta được

$$2x^2+xy+\frac{5-x^3}{2x}=4x+y\Leftrightarrow 3x^3-8x^2+5+2x^2y-2xy=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x^2-5x-5)+2xy(x-1)=0\Leftrightarrow (x-1)(3x^2-5x-5+2xy)=0$$

- Với $x=1$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases}1+2y^2=5\\ 2+y+y^2=4+y\end{cases}\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{2}$

- Với $3x^2-5x-5+2xy$ khi đó thay vào phương trình (2) ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$2x^2 - \frac{1}{2}\left(3x^2 - 5x - 5\right) + y^2 = 4x + y$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 5 + 2y^2 = 8x + 2y \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 = 2y\left(1 - y\right)$ (*)

Vế trái $x^2 - 3x + 5 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4}$

Vế phải $2y\left(1 - y\right) \leq \frac{1}{2}\left(y + 1 - y\right)^2 = \frac{1}{2}$

Từ đây suy ra phương trình (*) vô nghiệm

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(x; y\right) = \left(1; \sqrt{2}\right); \left(1; -\sqrt{2}\right)$

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 13y^3 - 3x^2 = 1 \\ y^2 + 4y + 1 = 5x + 4xy \end{cases}$ $\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

Lời giải:

Nhận thấy $y = -\frac{5}{4}$ không thỏa mãn hệ, nên với $y \neq -\frac{5}{4}$ rút $x = \frac{y^2 + 4y + 1}{4 + 5y}$ từ phương trình thứ hai thay vào phương trình thứ nhất ta được

$13y^3 - 3\left(\frac{y^2 + 4y + 1}{4 + 5y}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(y - 2\right)^3\left(y + 2\right)\left(13y^2 + 16y + 7\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 2 \end{array}\right.$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\left(x; y\right) = \left(1; -2\right); \left(1; 2\right)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau:

1.1. $\begin{cases} 16x^3y^3 - 9y^3 = \left(2xy - y\right)\left(4xy^2 + 3\right) \\ 4x^2y^2 - 2xy^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.2. $\begin{cases} 16x^2y^2 - 17y^2 = -1 \\ 4xy + 2x - 7y = -1 \end{cases}$

DẠNG TOÁN DÙNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

<u>Để ý điều kiện nghiệm của hệ, Sử dụng phương pháp hàm số, sử dụng bất đẳng thức:</u>

Biến đổi một phương trình của hệ thành $f(x) = f(y)$ (*)

Nếu chứng minh được hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng hoặc đơn điệu giảm trên miền nghiệm của hệ thì phương trình (*) tương đương với: $y = x$, lúc này ta thế ngược lại hệ.

Bất đẳng thức xem **<u>chuyên đề giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và phương pháp chứng minh bất đẳng thức</u>**

BÀI TẬP MẪU

Bài 1.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2 + y^2 - 5xy - 7x + 3y + 2 = 0 & (1) \\ \dfrac{x-y}{3} = \ln(x+2) - \ln(y+2) & (2) \end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

+ Điều kiện: $x > -2; y > -2$

Coi (1) là phương trình bậc 2 với ẩn là y, ta được

$(1) \Leftrightarrow y^2 + (3-5x)y + 6x^2 - 7x + 2 = 0$, ta có

$$\Delta_y = (x-1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{5x-3+x-1}{2} = 3x-2 \\ y = \dfrac{5x-3-(x-1)}{2} = 2x-1 \end{array}\right.$$

Từ phương trình (2) ta có:

$$x - 3\ln(x+2) = y - 3\ln(y+2) \Leftrightarrow f(x) = f(y); f(t) = t - 3\ln(t+2), t > -2$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $f'(t)=\frac{t-1}{t+2}\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

(i). Nhận thấy với $x=y=1$ là nghiệm của hệ.

(ii). Với $x<1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y-x=2x-2<0\\ y-x=x-1<0\end{array}\right.\Rightarrow y<x,\forall x<1\Rightarrow f(y)>f(x)\Rightarrow VN$.

(iii). Với $x>1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y-x=2(x-1)>0\\ y-x=x-1>0\end{array}\right.\Rightarrow y>x>1,\forall x>1\Rightarrow f(y)>f(x)\Rightarrow VN$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1,1)$.

Bài 2.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{(x+1)^2+21}-\sqrt{y}=(y+1)^2 & (1)\\ \sqrt{(y+1)^2+21}-\sqrt{x}=(x+1)^2 & (2)\end{cases}$

Lời giải:

+ Điều kiện: $x,y\ge 0$

Nhận thấy $x=0\vee y=0$, không là nghiệm của hệ nên $x>0;y>0$.

Trừ theo vế 2 phương trình với nhau ta được

$$\sqrt{(x+1)^2+21}+\sqrt{x}+(x+1)^2=\sqrt{(y+1)^2+21}+\sqrt{y}+(y+1)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x)=f(y);f(t)=\sqrt{(t+1)^2+21}+\sqrt{t}+(t+1)^2,t>0$$

Ta có $f'(t)=2(t+1)+\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{t+1}{\sqrt{(t+1)^2+21}}>0,\forall t>0$. Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến.

Suy ra $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$, khi đó thay vào (1) ta được phương trình

$$(x+1)^2+\sqrt{x}-\sqrt{(x+1)^2+21}=0(*),$$

xét hàm số $g(x)=(x+1)^2+\sqrt{x}-\sqrt{(x+1)^2+21}$. Ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$g'(x)=2x+2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+21}}>2-\dfrac{x+1}{|x+1|}>0$. Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến.

Mặt khác ta có, $g(1)=0$. Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*). Suy ra nghiệm $x=y=1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

Bài 3.

Giải hệ phương trình : $\begin{cases}(2x^2-1)(2y^2-1)=\dfrac{7}{2}xy & (1)\\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0 & (2)\end{cases}$

Lời giải:

Coi (2) là phương trình bậc 2 với ẩn là x thì điều kiện phương trình này có nghiệm là

$\Delta_x=(y-7)^2-4y^2+24y-56\ge 0\Leftrightarrow y\in\left[1,\dfrac{7}{3}\right]$.

Cũng coi (2) là phương trình bậc 2 với ẩn là y thì điều kiện để phương trình này có nghiệm là

$\Delta_y=(x-6)^2-4x^2+28x-56\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[2;\dfrac{10}{3}\right]$

+ Nhận thấy $x=0\vee y=0$, không là nghiệm của hệ . Ta chia 2 vế của (1) cho xy

$\Rightarrow\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)\left(2y-\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow f(x)f(y)=\dfrac{7}{2}$

Ta có $f'(t)=2+\dfrac{1}{t^2}>0\Rightarrow f\uparrow\Rightarrow f(x)f(y)\ge f(2)f(1)=\dfrac{7}{2}$

Vậy $x=2;y=1$. Thay vào (2) thấy thỏa mãn.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(2;1)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}4x^3+3xy^2=7y\\ y^3+6x^2y=7\end{cases}$$

Lời giải :

Từ phương trình thứ hai của hệ , ta có $y^3+6x^2y=7 \Leftrightarrow y\left(y^2+6x^2\right)=7 \Rightarrow y>0$.

Khi đó từ phương trình thứ nhất ta suy ra $x>0$. Vậy $x,y>0$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được :

$(x-y)\left(4x^2-2xy+y^2\right)=7(y-1)(*)$

Xét phương trình (*).

(i). Với $0<y<1$ thì $VP<0 \Rightarrow VT<0 \Leftrightarrow x<y \Rightarrow 0<x<y<1$, từ đó ta suy ra $y^3+6x^2y<7$, hệ vô nghiệm.

(ii). Với $y>1 \Rightarrow 7(y-1)>0 \Rightarrow VP>0 \Rightarrow VT>0 \Rightarrow x>y>1$, từ đó suy ra $y^3+6x^2y>7$, hệ vô nghiệm.

Vậy với $y=1$, ta có nghiệm $x=1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(1,1)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3-3x^2+2=y^3-3y^2-2 \\ \log_y\left(\dfrac{x-2}{y-1}\right)+\log_x\left(\dfrac{y-1}{x-2}\right)=(x-2012)^2 \end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<y<1 \\ 0<x<2 \end{cases} \\ \begin{cases} y>1 \\ x>2 \end{cases} \end{array}\right.$

Đặt $y=u-1$, khi đó phương trình thứ nhất trở thành

$x^3-3x^2=u^3-3u^2$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t$ trên miền xác định, ta có $f'(t)=3t^2-3$ nên đơn điệu trên miền xác định. Do đó $f(x)=f(u) \Leftrightarrow x=u \Leftrightarrow x=y+1$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta suy ra nghiệm $x=2012$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 6. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2} \\ 4^x+4=4x+4\sqrt{2y-2x+4} \end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện $y-x+2\ge 0$.

Đặt $t=x^2-2y$ khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành

$$4+3^{t+2}=\left(4+9^t\right).7^{2-t} \Leftrightarrow \frac{4+3^{t+2}}{7^{t+2}}=\frac{4+3^{2t}}{7^{2t}} \Leftrightarrow f(t+2)=f(2t)$$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{4+3^x}{7^x}=4\left(\dfrac{1}{7}\right)^x+\left(\dfrac{3}{7}\right)^x$ là hàm nghịch biến.

Do đó $f(t+2)=f(2t)\Leftrightarrow 2t=t+2\Leftrightarrow t=2$

Từ đó suy ra $x^2-2y=2\Leftrightarrow 2y=x^2-2$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$4^x+4=4x+4\sqrt{x^2-2-2x+4}\Leftrightarrow 4^{x-1}=x-1+\sqrt{(x-1)^2+1}\Leftrightarrow 4^s=s+\sqrt{s^2+1}$$

Trong đó $s=x-1$

Do $\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)\left(\sqrt{s^2+1}-s\right)=1\Rightarrow 4^{-s}=\sqrt{s^2+1}-s$

Từ đó ta suy ra : $4^s-4^{-s}-2s=0(*)$

Ta xét hàm số $f(x)=4^x-4^{-x}-2x$ ta có $f'(x)=\ln 4\left(4^x+4^{-x}\right)-2\ge 2\ln 4-2>0$. Do đó hàm số đơn điệu tăng. Mặt khác nhận thấy $f(0)=0$ nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất $s=0$. Từ đây suy ra $x=1\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1 \\ x\sqrt{6x+2x^2+1}=4xy+6x+1 \end{cases}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Do $\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=1$ nên từ phương trình thứ nhất của hệ ta suy ra

$$x+\sqrt{1+x^2}=-y+\sqrt{y^2+1}\Leftrightarrow f(x)=f(-y)$$

Xét hàm số $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$ ta có $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}>\dfrac{|x|+x}{\sqrt{1+x^2}}>0$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên $f(x)=f(-y)\Leftrightarrow x=-y$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có phương trình

$$x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{6x+2x^2+1}-\frac{x}{2}\right)^2=\frac{25}{4}x^2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{6x+2x^2+1}=3x\\ \sqrt{6x+2x^2+1}=-2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=-1\\ x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(1,-1);\left(\dfrac{3-\sqrt{11}}{2};\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 & (1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 & (2)\end{cases}$$

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases}x\le\dfrac{3}{4}\\ y\le\dfrac{5}{2}\end{cases}(*)$, khi đó phương trình (1) tương đương với

$$(4x^2+1)x+\left(\frac{-(5-2y)-1}{2}\right)\sqrt{5-2y}=0$$

$$\Leftrightarrow(4x^2+1)(2x)=((\sqrt{5-2y})^2+1)\sqrt{5-2y}$$

$$\Leftrightarrow f(2x)=f(\sqrt{5-2y});\ f(t)=t(t^2+1),\ f'(t)=3t^2+1>0$$

$$\Rightarrow f\uparrow\Rightarrow f(2x)=f(\sqrt{5-2y})\Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y}\ge0\Rightarrow y=\frac{5-4x^2}{2};x\ge0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Thay vào (2) ta được phương trình: $4x^2+(\frac{5-4x^2}{2})^2+2\sqrt{3-4x}=7(*)$

Xét hàm số $f(x)=4x^2+(\frac{5-4x^2}{2})^2+2\sqrt{3-4x}-7$ trên đoạn $\left[0;\frac{3}{4}\right]$

Ta có $f'(x)=-4x(3+4x^2)+\frac{-4}{\sqrt{3-4x}}<0,\forall 0\le x<\frac{3}{4}\Rightarrow f\downarrow\Rightarrow f(x)=0$ nếu có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất. Nhận thấy $f(\frac{1}{2})=0\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=2\end{cases}$

Bài 9. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\log_3(2x+1)-\log_3(x-y)=\sqrt{4x^2+4x+2}-\sqrt{(x-y)^2+1}-3x^2+y^2-4x-2xy-1\\ \log_3(2x)+4x^2-\sqrt{4x^2+1}=1-\sqrt{2}\end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại thành

$$\sqrt{(2x+1)^2+1}-(2x+1)^2-\log_3(2x+1)=\sqrt{(x-y)^2+1}-(x-y)^2-\log_3(x-y)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+1}-t^2-\log_3 t$ với $t>0$, ta có

$f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}-2t-\frac{1}{t\ln 3}<0$ nên hàm số $f(t)$ nghịch biến. Do đó phương trình đầu tiên

$f(2x+1)=f(x-y)\Leftrightarrow 2x+1=x-y\quad(*)$

Xét hàm số $f(x)=\log_3(2x)+4x^2-\sqrt{4x^2+1},\forall x>0$

Ta có $f'(x)=4x\left(2-\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\right)+\frac{1}{x\ln 3}>0$, nên hàm số đơn điệu tăng.

Mặt khác ta có $f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\sqrt{2}$. Suy ra $x=1-\sqrt{2}$ kết hợp với phương trình (*) ta có nghiệm $y=-\frac{3}{2}$.

Bài 10. Giải hệ phương trình :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} x^3+3x-1+\sqrt{2x+1}=y \\ y^3+3y-1+\sqrt{2y+1}=x \end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $x, y \geq -\frac{1}{2}$.

Trừ theo vế hai phương trình của hệ ta được

$x^3+4x+\sqrt{2x+1}=y^3+4y+\sqrt{2y+1} \Leftrightarrow f(x)=f(y)$

Xét hàm số $f(x)=x^3+4x+\sqrt{2x+1}$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$. Ta có

$f'(x)=3x^2+4+\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>0$, nên $f(x)$ đơn điệu tăng trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Vậy phương trình $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được phương trình :

$x^3+2x-1+\sqrt{2x+1}=0$

Ta xét hàm số $f(x)=x^3+2x-1+\sqrt{2x+1}$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=3x^2+2+\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>0$, nên hàm số $f(x)$ đơn điệu tăng trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Mặt khác nhận thấy $f(0)=0$. Vậy phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$, từ đó suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(0,0)$.

Bài 11. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4^{x^2-16}+3\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}=4^{y^2-8y}+3\sqrt{y-4}+\sqrt{y^2-8y+17} \\ y\left(x^2-1\right)-4x^2+3x-8+\ln\left(x^2-3x+3\right)=0 \end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $x \geq 0, y \geq 4$.

Khi đó biến đổi phương trình thứ nhất thành :

$4^{x^2-16}+3\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}=4^{(y-4)^2}+3\sqrt{y-4}+\sqrt{(y-4)^2+1}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Xét hàm số $f(t)=4^{t^2-16}+3\sqrt{t}+\sqrt{t^2+1}$ trên đoạn $\left[0;+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=2t4^{t^2-16}\ln 4+\dfrac{3}{2\sqrt{t}}+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0,\forall t\in\left[0;+\infty\right)$. Nên hàm số $f(t)$đơn điệu tăng trên đoạn $\left[0;+\infty\right)$. Vậy phương trình $f(x)=f(y-4)\Leftrightarrow x=y-4\Leftrightarrow y=x+4$ lúc này thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được phương trình

$x^3+2x-12+\ln\left(x^2-3x+3\right)=0(*)$

Ta xét hàm số $f(x)=x^3+2x-12+\ln\left(x^2-3x+3\right)$. Ta có

$f'(x)=3x^2+2+\dfrac{2x-3}{x^2-3x+3}=3x^2+\dfrac{2x^2-4x+3}{x^2-3x+3}>0$, nên hàm số $f(x)$đơn điệu tăng trên đoạn $\left[0;+\infty\right)$.

Mặt khác nhận thấy $f(2)=0$, từ đó suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=2\Rightarrow y=6$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x,y\right)=\left(2,6\right)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=x^2+y^2$$

Phương trình này có nghiệm nếu $xy\ge 0$. Nhận thấy $x=y=0$ là một nghiệm của hệ.

Xét $xy>0$

Phương trình này có $VP\ge 2xy;VT=\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2+8}}+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{\left(y-1\right)^2+8}}\le xy+xy=2xy$

Dấu bằng xảy ra khi cà chỉ khi $x=y=1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(x,y)=(0,0);(1,1)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3+2y^2=x^2y+2xy \\ 2\sqrt{x^2-2y+1}+\sqrt[3]{y^3-14}=x-2 \end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $x^2-2y-1\geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ biến đổi thành :

$(x^2-2y)(x-y)=0$, so sánh với điều trên suy ra $x=y$, lúc này ta thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$2\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt[3]{x^3-14}=x-2$, phương trình này có nghiệm nếu

$\sqrt[3]{x^3-14}\leq x-2\Rightarrow x^2-2x-1\leq 0$. Kết hợp với điều kiện suy ra $x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$, thử lại ta thấy nghiệm thỏa mãn.

Vậy hệ có hai nghiệm là $(x,y)=(1+\sqrt{2},1+\sqrt{2});(1-\sqrt{2},1-\sqrt{2})$.

Bài 14. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+2x=\dfrac{121}{9}-27^{\frac{x}{2}} \\ x^2+y^2+xy-3x-4y+4=0 \end{cases}$$

Lời giải :

Coi phương trình thứ hai là phương trình bậc hai ẩn y, khi đó phương trình này tương đương với :

$y^2+(x-4)y+x^2-3x+4=0$, phương trình này có nghiệm nếu

$\Delta_y=(x-4)^2-4(x^2-3x+4)\geq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq\dfrac{4}{3}$.

Khi đó $x^2+2x+27^{\frac{x}{2}}\leq\left(\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{8}{3}+27^{\frac{2}{3}}=\dfrac{121}{9}$. Vậy dấu bằng xảy ra, suy ra $x=\dfrac{4}{3}\Rightarrow y=\dfrac{4}{3}$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\sqrt{5-x^2}+\sqrt{5-\frac{1}{x^2}}=3+y^2\\ x+\frac{1}{x}=2(3-2y)\end{cases}$$

Lời giải :

Nhân thêm 2 vào hai vế của phương trình thứ nhất sau đó cộng theo vế với phương trình thứ hai, ta được :

$$2\sqrt{5-x^2}+x+\frac{1}{x}+2\sqrt{5-\frac{1}{x^2}}=2y^2-4y+12$$

Sử dụng bất đẳng thức cauchy-shar ta có

$$\begin{cases}x+2\sqrt{5-x^2}\le\sqrt{(1^2+2^2)(x^2+5-x^2)}=5\\ \frac{1}{x}+2\sqrt{5-\frac{1}{x^2}}\le\sqrt{(1^2+2^2)\left(\frac{1}{x^2}+5-\frac{1}{x^2}\right)}=5\end{cases}\Rightarrow VT\le 10$$

Mặt khác lại có $VP=2y^2-4y+12=2(y-1)^2+10\ge 10$

Vậy $VT=VP=0\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$

Bài 16. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}x^{y+1}=(y+1)^x\\ \sqrt{-4x^2+18x-20}+\frac{2x^2-9x+6}{2x^2-9x+8}=\sqrt{y+1}\end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $\begin{cases}-4x^2+18x-20\ge 0\\ 2x^2-9x+8\ne 0\\ y+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\le x\le\frac{5}{2}\\ y\ge -1\end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đặt $t=\sqrt{-4x^2+18x-20}=\sqrt{-4\left(x+\frac{9}{4}\right)^2+\frac{1}{4}}\le\frac{1}{2}\Rightarrow t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành : $t+1+\frac{4}{t^2+4}=\sqrt{y+1}$,

Xét hàm số $f(t)=t+1+\frac{4}{t^2+4}$, ta có $f'(t)=1-\frac{8t}{\left(t^2+4\right)^2}\ge\frac{t^4+7t^2+\left(t-4\right)^2}{\left(t^2+4\right)^2}>0$

Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\left[0;\frac{1}{2}\right]\Rightarrow f(t)\ge f(0)=2$. Từ đó suy ra ta phải có $\sqrt{y+1}\ge 2\Rightarrow y\ge 3$.

Từ phương trình thứ nhất của hê : Ta lấy logarit tự nhiên hai vế ta được

$\left(y+1\right)\ln x=x\ln\left(y+1\right)\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln\left(y+1\right)}{y+1}$ (*)

Xét hàm số $g(u)=\frac{\ln u}{u}$, ta có $g'(u)=\frac{1-\ln u}{u^2}=0\Leftrightarrow u=e$

Suy ra hàm số tăng trong khoảng $\left(0;e\right)$, giảm trong khoảng $\left(e;+\infty\right)$

Vậy ta có : $x\in\left[2;\frac{5}{2}\right]\Rightarrow g(x)\ge g(2)=\frac{\ln 2}{2}$ và $y\in\left[3;+\infty\right)\Rightarrow g(y)\le g(3)=\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$

Từ đó suy ra phương trình (*) tương đương với : $x=2;y=3$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(2;3\right)$.

Bài 17. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\log_2 x=2^{y+2}\\ 4\sqrt{1+x}+xy\sqrt{4+y^2}=0\end{cases}$$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện $x>0$, từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra $y<0$

Từ phương trình thứ hai ta suy ra $16\left(x+1\right)=x^2y^2\left(4+y^2\right)\Leftrightarrow x^2y^4+4x^2y^2-16\left(x+1\right)=0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là y^2, ta được $\Delta'_{y^2} = 4x^4 + 16x^2(x+1) = 4x^2(x+2)^2$, từ đó suy ra

$$\left[\begin{array}{l} y^2 = \dfrac{-2x^2 + 2x(x+2)}{x^2} = \dfrac{4}{x} \\ y^2 = \dfrac{-2x^2 - 2x(x+2)}{x^2} = \dfrac{-4x^2 - 4x}{x^2} < 0 \end{array}\right.$$

Chỉ nhận nghiệm $y^2 = \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{y^2}$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$\log_2 \frac{4}{y^2} = 2^{y+2} \Leftrightarrow 2 - \log_2 y^2 - 2^{y+2} = 0 \ (*)$$

Xét hàm số $f(y) = 2 - \log_2 y^2 - 2^{y+2}$ với $y < 0$

Ta có $f'(y) = -2^{y+2}\ln 2 - \dfrac{2}{y\ln 2} = \dfrac{-2}{y\ln 2}\left(1 - y(\ln 2)^2.2^{y+1}\right) > 0, \forall y \in (-\infty;0)$

Vậy $f(y)$ là hàm đơn điệu tăng trên khoảng $(-\infty;0)$. Mặt khác lại có $f(-1) = 0 \Rightarrow y = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*). Từ đây suy ra $x = 4$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = (4;-1)$

Bài 18. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 + x + \log_2 \dfrac{x}{y} = 8y^3 + 2y + 1 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} - 1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải :

Điều kiện : $x \geq 1, y \geq 1$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ được biến đổi thành :

$$x^3 + x + \log_2 x = (2y)^3 + 2y + \log_2 2y$$

Ta xét hàm số $f(t) = t^3 + t + \log_2 t, t > 0$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 + \dfrac{1}{t\ln 2} > 0, t > 0$. Suy ra hàm số đơn điệu tăng. Từ đó suy ra $f(x) = f(2y) \Leftrightarrow x = 2y$, thay vào phương trình thứ hai ta được :

$$\sqrt{2y-1} - \sqrt{y-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y - 1 = y - 2\sqrt{y-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{y-1} = 1 - y \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x^2}{(y+1)^2}+\dfrac{y^2}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{2} \\ 3xy=x+y+1 \end{cases}$

Lời giải :

Ta có $(x+1)(y+1)=xy+x+y+1=3xy+xy=4xy$

Khi đó sử dụng bất đẳng thức $a^2+b^2\geq 2ab$, ta được

$$\frac{x^2}{(y+1)^2}+\frac{y^2}{(x+1)^2}\geq 2\sqrt{\frac{x^2}{(y+1)^2}.\frac{y^2}{(x+1)^2}}=\frac{1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x^2}{(y+1)^2}=\dfrac{y^2}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-1\pm 2x \\ x=-1\pm 2y \end{cases}$

Thế ngược lại phương trình thứ hai của hệ

Bài 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(y^3-x^3)=7 \\ x^4+x^3y+9y=y^3x+x^2y^2+9x \end{cases}$

Lời giải :

Hệ tương đương với

$$\begin{cases} x(y^3-x^3)=7 \\ x(x^3-y^3)+x^2y(x-y)-9(x-y)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x(y^3-x^3)=7 \\ (x-y)\left(x(x^2+xy+y^2)+x^2y-9\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x(y^3-x^3)=7 \\ x(x^2+xy+y^2)+x^2y-9=0 \end{cases} \text{ do } x\neq y$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x(y^3-x^3)=7 \\ x(x+y)^2=9 \end{cases}$$

Từ đây suy ra $x>0$ và $y>x>0$ và $y=\dfrac{3}{\sqrt{x}}-x$, thay vào phương trình thứ nhất ta được

$x\left(\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}-x\right)^3-x^3\right)=7$, đặt $x=t^2$ ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$t^2\left(\frac{3}{t}-t^2\right)^3-t^6=7 \Leftrightarrow \left(t^3-3\right)^3+t^7+7t=0$

Dễ thấy vế trái là hàm đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$, lại có $f(1)=0$

Vậy $x=1 \Rightarrow y=2$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;2\right)$

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{2x+1}-\sqrt{2y+1}=y-x\\16x^2y^2+5=6\sqrt[3]{4x^2y+x}\end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện $x,y\geq -\frac{1}{2}$ khi đó hệ tương đương với

$$\begin{cases}\dfrac{2\left(x-y\right)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}}=y-x\\16x^2y^2+5=6\sqrt[3]{4x^2y+x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x-y\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}}+1\right)\\16x^2y^2+5=6\sqrt[3]{4x^2y+x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=y\\16x^4+5=6\sqrt[3]{4x^3+x}\end{cases}$$

Từ đây suy ra $x,y>0$

Ta có $\sqrt[3]{4x^3+x}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4x\left(4x^2+1\right).2}\leq\frac{3}{2}\left(4x+4x^2+1+2\right)=\frac{3}{2}\left(4x^2+4x+3\right)$

Từ đó suy ra $16x^5+5\leq\frac{3}{2}\left(4x^2+4x+3\right)\Leftrightarrow 2\left(2x^2+2x+1\right)\left(2x-1\right)^2\leq 0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Thử lại thấy $x=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn phương trình trên

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Bài 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases}8y^3+\left(2x+y\right)6xy=6x^3+13\\x^3+5x+\left(x^3-2y+6\right)\sqrt{x^3-2y+1}=0\end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

Điều kiện: $x^3-2y+1\geq 0$

Đặt $t=\sqrt{x^3-2y+1}$ thì phương trình thứ hai của hệ được viết lại thành

$$x^5+5x+\left(t^2+5\right)t=0\Leftrightarrow x^5+5x=\left(-t\right)^5+5\left(-t\right)$$

Xét hàm số $f(u)=u^5+5u$ có $f'(u)=5u^4+5>0$ nên hàm số $f(u)$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$, từ đó

suy ra $f(x)=f(-t)\Leftrightarrow x=-t\Leftrightarrow x=-\sqrt{x^3-2y+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ y=\dfrac{1}{2}\left(x^3+1-x^2\right)\end{cases}$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được phương trình

Bài 29. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4}\\ x^2-y^2-3x+3y+1=0\end{cases}$

Lời giải :

Bình luận : Phương trình thứ nhất được viết lại thành

$x+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}=3y+\sqrt{y^2+4}$ 2 vế có dạng gần tương tự nhau ; tuy nhiên sai khác nhau đại lượng x và $3y$; bây giờ thế $3y$ từ phương trình thứ hai của hệ vào chúng ta sẽ được gì ?

$$x+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}=y^2+3x-1-x^2+\sqrt{y^2+4}\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}=y^2+\sqrt{y^2+4}$$

Rõ ràng đưa về phương trình dạng $f(x-1)=f(y)$ trong đó $f(t)=t^2+\sqrt{t^2+4}$

Hàm này có $f'(t)=2t+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}$; liệu chúng ta có thể đánh giá được bằng tính đơn điệu của hàm số hay không ?

Trình bày :

Rút $3y=y^2+3x-1-x^2$ từ phương trình thứ hai của hệ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được

$$x+\sqrt{\left(x-1\right)^2+4}=y^2+3x-1-x^2+\sqrt{y^2+4}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \sqrt{(x-1)^2+4} = y^2 + \sqrt{y^2+4}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 + \sqrt{(x-1)^2+4} - \sqrt{y^2+4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 + \frac{(x-1)^2 - y^2}{\sqrt{(x-1)^2+4} + \sqrt{y^2+4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+4} - \sqrt{y^2+4}}\right)\left((x-1)^2 - y^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x-1 \\ y = 1-x \end{array}\right.$$

- Nếu $y = x-1$ khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} y = x-1 \\ x^2 - y^2 - 3x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ x^2 - (x-1)^2 - 3x + 3(x-1) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Nếu $t = 1-x$ khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} y = 1-x \\ x^2 - y^2 - 3x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1-x \\ x^2 - (1-x)^2 - 3x + 3(1-x) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y) = \left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y\left(4y^2 + 3x^2\right) = x^4\left(x^2+3\right) \\ 2^x\left(\sqrt{2y-2x+5} - x + 1\right) = 4 \end{cases}$

Lời giải:

Điều kiện : $2y - 2x + 5 \geq 0$

Nhận thấy $x = 0$ không là nghiệm của hệ ; nên chia hai vế phương trình thứ nhất của hệ cho x^3, ta được phương trình

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\left(\frac{2y}{x}\right)^3+3.\frac{2y}{x}=x^3+3x$$

Ta xét hàm số $f(t)=t^3+3t$ có $f'(t)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên suy ra $f(t)$ đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

Vậy nên $f\left(\frac{2y}{x}\right)=f(x)\Leftrightarrow x=\frac{2y}{x}\Leftrightarrow y=\frac{x^2}{2}$; ta thay vào phương trình thứ hai của hệ ; ta được phương trình

$$2^{x-1}\left(\sqrt{(x-1)^2+4}-(x-1)\right)=2\ (*)$$

Xét hàm số $f(u)=2^u\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)-2$ trên $\mathbb{R}$, ta có

$$f'(u)=2^u\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)\left(\ln 2-\frac{1}{\sqrt{u^2+4}}\right)>0 \text{ ; do } \begin{cases}\sqrt{u^2+4}>|u|\ge u\\ \ln 2>1>\frac{1}{\sqrt{u^2+4}}\end{cases}$$

Vậy $f(u)$ đơn điệu tăng ; nên nếu phương trình $f(u)=0$ có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất.

Phương trình (*) tương đương với $f(x-1)=0=f(0)\Leftrightarrow x=1$; suy ra $y=\frac{1}{2}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y-1)\sqrt{x+y-1}+6x+2y=20\\ (3x+y-2)\sqrt{3x+y-2}+2x+2y=18\end{cases}$

<u>Lời giải :</u>

Điều kiện $\begin{cases}x+y-1\ge 0\\ 3x+2y-1\ge 0\end{cases}$

Khi đó hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}(x+y-1)\sqrt{x+y-1}+2(3x+y-2)=16\\ (3x+y-2)\sqrt{3x+y-2}+2(x+y-1)=16\end{cases}\ (1)$$

Trừ theo vế hai phương trình trên ta được

$$(x+y-1)\sqrt{x+y-1}-2(x+y-1)-(3x+y-2)\sqrt{3x+y-2}+2(3x+y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left(\sqrt{x+y-1}-2\right)+(3x+y-2)\left(2-\sqrt{3x+y-2}\right)=0\ (*)$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ (*) ta có nhận xét sau

Nếu $x+y-1\geq 4$ thì từ (*) suy ra $3x+2y-2\geq 4$

Nếu $x+y-1\leq 4$ thì từ (*) suy ra $3x+2y-2\leq 4$

Như vậy hệ có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y-1\geq 4\\3x+y-2\geq 4\end{cases}\\\begin{cases}x+y-1\leq 4\\3x+y-2\leq 4\end{cases}\end{array}\right.$ từ đây kết hợp với hệ (1) ta suy ra hệ tương đương với

$$\begin{cases}x+y-1=4\\3x+y-2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{9}{2}\end{cases}$$

Kết luận :

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2}\right)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau :

Bài 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{x+y}=3\\\sqrt{x}+\sqrt{(y-4)^2+5}=\sqrt{5}\end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2x^2+y^3-4x+3=0\\x^2y^2-2x+y^2=0\end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}y^3+x^2=\sqrt{64-x^2y}\\(x^2+2)^3=y+6\end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}3-(y+1)^2=\sqrt{x-y}\\x+8y=\sqrt{x-y-9}\end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^2+y=x+y^2\\2^{x+y}-2^{x-1}=x-y\end{cases}$

Bài 6. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^2-12xy+20y^2=0\\\ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y\end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 7. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{11x-y}-\sqrt{y-x}=1 \\ 7\sqrt{y-1}+6y-26x=3 \end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2y+y^3=2x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$

Bài 9. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3-3x^2=y^3-3y-2 \\ \log_x\left(\dfrac{y-1}{x-2}\right)+\log_y\left(\dfrac{x-2}{y-1}\right)=(x-3)^3 \end{cases}$

Bài 10. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x-1}-\sqrt{y}=8-x^3 \\ (x-1)^4=y \end{cases}$

Bài 11. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \log_y\sqrt{xy}=\log_x y \\ 2^x+2^y=3 \end{cases}$

Bài 12. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{y+1}=(y+1)^x \\ \sqrt{-4x^2+18x-20}+\dfrac{2x^2-9x+6}{2x^2-9x+8}=\sqrt{x+1} \end{cases}$

Bài 13. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{4x-y^2}-\sqrt{y+2}=\sqrt{4x^2+y} \\ 4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1} \end{cases}$$

Bài 14. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 6x^2\sqrt{x^3-6x+5}=(x^2+2x-6)(x^3+4) \\ x+\dfrac{2}{x}=1+\dfrac{2}{y^2} \end{cases}$$

Bài 15. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2\left(\dfrac{x^{10}}{y^2}+\dfrac{y^{10}}{x^2}\right)+x^{16}+y^{16}=4(1+x^2y^2)^2-10 \\ (x+y-1)\sqrt{y-1}=10 \end{cases}$$

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{xy-6}=12-y^2 \\ x^2y-x^3-3x+3y-xy^2-x^2y=0 \end{cases}$

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8y^3+(2x+y)6xy=6x^3+13 \\ x^3+5x+(x^3-2y+6)\sqrt{x^3-2y+1}=0 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 18. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}=27-x^3 \\ (x-2)^4+1=y \end{cases}$

DẠNG HỆ CÓ MỘT PHƯƠNG TRÌNH LÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TÌM ĐƯỢC NGHIỆM

Một phương trình trong hệ có thể đưa về dạng : $(ax+by+c)(a_1x+b_1y+c_1)=0$

Mục đích là biểu diễn ẩn này theo ẩn kia ở dạng bậc nhất ; khi đó chỉ việc thay vào phương trình còn lại trong hệ và giải phương trình với một ẩn số.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^2=(5x+4)(4-x) & (1) \\ y^2-5x^2-4xy+16x-8y+16=0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Biến đổi phương trình (2) thành phương trình bậc 2 với ẩn là y, ta được

$y^2-(4x+8)y-5x^2+16x+16=0$, phương trình có

$\Delta_y=9x^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=5x+4 \\ y=4-x \end{array}\right.$

(i). Với $y=5x+4$, thay vào (1) ta được $x(5x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4 \\ x=-\dfrac{4}{5} \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$

(ii). Với $y=4-x$, thay vào (1) ta được: $x(4-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4 \\ x=4 \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$

Vậy hệ có 3 nghiệm là $(0;4),(4;0),\left(\dfrac{-4}{5};0\right)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2(x-y) & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải:

+ Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} (*)$, khi đó (1) tương đương với

$(1) \Leftrightarrow x^2 - (y+1)x - (y+2y^2) = 0$, coi đây là phương trình bậc 2 với ẩn là x ta được

$\Delta_x = (y+1)^2 + 4(y+2y^2) = 9y^2 + 6y + 1 = (3y+1)^2$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{y+1+(3y+1)}{2} = 2y+1 \\ x = \dfrac{y+1-(3y+1)}{2} = -y \end{array} \right.$$

$+x = -y \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow$ loại.

$+x = 2y - 1,$ thay vào phương trình 2 ta được: $(2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2(y+1)$

$\Leftrightarrow (y+1)(2-\sqrt{2y}) = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} 2 - \sqrt{2y} = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 5$

Bài 3. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \dfrac{(x-y)^2}{2} & (1) \\ (x+y)(x+2y) + 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ y \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó coi (2) là phương trình bậc hai với ẩn là x, ta được

$\left[\begin{array}{l} x = 1 - y \\ x = -4 - 2y \end{array} \right.$ nhưng do $x \geq -\dfrac{1}{2}, y \geq -\dfrac{1}{2}$ nên $x + 2y + 4 > 0$ vậy $x = 1 - y \Leftrightarrow x + y = 1$

Ta biến đổi phương trình thứ nhất:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\frac{(x-y)^2}{2}\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\frac{(x+y)^2-4xy}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+y)+2+2\sqrt{4xy+2(x+y)+1}=\left(\frac{(x+y)^2-4xy}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4xy+3}=\left(\frac{1}{2}-2xy\right)^2-4=\left(-2xy-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-2xy\right)$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{4xy+3}=(4xy+3)(2xy-5)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4xy+3=0\\(2xy-5)\sqrt{4xy+3}=8\end{array}\right.\quad(*)$$

Do $1=(x+y)^2\geq 4xy\Rightarrow 2xy-5<0$, vậy hệ (*) $\Leftrightarrow 4xy+3=0\Leftrightarrow xy=-\frac{3}{4}$

Vậy hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}x+y=1\\xy=-\frac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=\frac{3}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x,y)=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{4x-3}=(2y^2+11)(17-y)+\sqrt{y}\\y(y-3x+3)=5(3x+2)\end{cases}$

<u>Lời giải:</u>

Điều kiện $\begin{cases}x\geq\frac{3}{4}\\y\geq 0\end{cases}$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ coi là phương trình bậc hai với ẩn là y ta được

$y^2+(3-3x)y-15x-10=0$ có $\Delta=(3-3x)^2+4(15x-10)=(3x+7)^2$

Suy ra $\left[\begin{array}{l}y=-5<0\\y=3x+2\end{array}\right.$ chỉ nhận nghiệm $y=3x+2x$, thay vào phương trình ban đầu của hệ ta được

$$\sqrt{4x-3}-\sqrt{3x+2}+5(18x^2+24x+19)(x-5)=0$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Leftrightarrow \frac{x-5}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{3x+2}}+5(x-5)(18x^2+24x+19)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{1}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{3x+2}}+5(18x^2+24x+19)\right)=0 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow y=17$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(5,17)$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Giải các hệ phương trình sau:

1.1. $\begin{cases} \frac{3}{2}(x^2-y^2)+2y+xy=4x-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \sqrt{4x-3}=(2y^2+11)(17-y)+\sqrt{y} \\ y(y-3x+3)=5(3x+2) \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2x^2-8xy^2-xy+4y^3=0 \\ 16x^3+2x-8y^2+5=0 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x^3+x^2(x^2+y)+x(x-y)^2=(3+2y-x)y^2 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Giải các hệ phương trình, hệ bất phương trình sau:

Bài 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3}=3^{-y-4} \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2\le 8 \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{9x}{5} \\ \frac{x}{y}=\frac{5+3x}{6(5-y)} \end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(\sqrt{2y} - \sqrt{x})^2 \end{cases}$

Bài 4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} \end{cases}$

Bài 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 27x^3y^3 + 7y^3 = 8 \\ 9x^2y + y^2 = 6x \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2 - \sqrt{x^2y^4 + 2xy^2 - y^4 + 1} = 2(3 - \sqrt{2} - x)y^2 \\ \sqrt{x - y^2} + x = 3 \end{cases}$

Bài 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 1 + x^2y^2 + xy = x^2 \\ \dfrac{1}{x^3} + y^3 = \dfrac{1}{x} + 3y \end{cases}$

Bài 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 7x = y^3 + 7y \\ x^2 + y^2 = x + y + 2 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 9. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 2y^2 = x^2y + 2xy \\ 2\sqrt{x^2 - 2y - 1} + \sqrt[3]{y^3 - 14} = x - 2 \end{cases}$

Bài 10. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{8xy}{x+y} = 16 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

Bài 11. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 12. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x-y)^2 \end{cases}$

Bài 13. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 13 \\ (x+y)(x^2-y^2) = 25 \end{cases}$

Bài 14. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x+y+1) + y(y+1) = 2 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 15. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x-1}-\sqrt{y}=8-x^3\\(x-4)^4=y\end{cases}$

Bài 16. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(1+4^{2x-y})5^{1-2x+y}=1+2^{2x-y+1}\\y^3+4x+1+\ln(y^2+2x)=0\end{cases}$

Bài 17. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5\\\sqrt{2x+y}+x-y=2\end{cases}$

Bài 18. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{3x}(1+\dfrac{1}{x+y})=2\\\sqrt{2y}(1-\dfrac{1}{x+y})=4\sqrt{2}\end{cases}$

Bài 19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x\sqrt{x}-\sqrt{x}=y\sqrt{y}+8\sqrt{y}\\x-y=5\end{cases}$

Bài 20. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10\\\sqrt{x+6}+\sqrt{y+6}=14\end{cases}$

Bài 21. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y+xy^2=6x^2\\1+x^2y^2=5x^2\end{cases}$

Bài 22. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+3)\\x^2-xy+y^2=3\end{cases}(x,y\in\mathbb{R})$

Bài 23. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{3}{x^2+y^2-1}+2\dfrac{y}{x}=1\\x^2+y^2+4\dfrac{y}{x}=22\end{cases}$

Bài 24. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0\\2\sqrt{2-x}-\sqrt{(2y-1)^3}=1\end{cases}$

Bài 25. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2-xy=3\\\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=4\end{cases}$

Bài 26. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}e^{x-y}+e^{x+y}=2(x+1)\\e^{x+y}=x-y+1\end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 27. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (1+4^{x-y})5^{1-x+y} = 1+3^{x-y+2} \\ x^2 - 3y\sqrt{y-\dfrac{1}{x}} = 1-2y \end{cases}$

Bài 28. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1}-\sqrt{2y-1} = 1 \end{cases}$

Bài 29. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + x - \dfrac{1}{y} = 2 \\ y - y^2x - 2y^2 = -2 \end{cases}$

Bài 30. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2+7y+2 \end{cases}$

Bài 31. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+xy}{3}} = x+y \\ x\sqrt{xy+5x+3} = 4xy-5x-3 \end{cases}$

Bài 32. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x^3+2x-y-1) = (y+1)x^2 \\ y^3+4x+1+\ln(y^2+2x) = 0 \end{cases}$

Bài 33. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 27x^3y^3+125 = 9y^3 \\ 45x^2y+75x = 6y^2 \end{cases}$

Bài 34. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x^2-y^2} = 3 \end{cases}$

Bài 35. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4xy^2-2y+3x^2 = 0 \\ y^2+x^2y+20 = 0 \end{cases}$

Bài 36. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{4y-1} = 2 \end{cases}$

Bài 37. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+y+xy^2+x = 18xy \\ x^4y^2+y^2+x^2y^4+x^2 = 208x^2y^2 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 38. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_7(2x+3y) = \log_3(2+2x+3y) \\ \ln(4x^2+x+1)+x^3 = 3(3y-7) \end{cases}$

Bài 39. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3xy^2 = -49 \\ x^2-8xy+y^2 = 8y-17x \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 40. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x = -(y^3 + 3) \end{cases}$

Bài 41. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \\ \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{y} = \sqrt{2 - y} - 1 \end{cases}$

Bài 42. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1 - x} = 3\sqrt{1 - x} - y \\ y = 2x^2 - 1 + 2xy\sqrt{1 + x} \end{cases}$

Bài 43. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y + xy^2 = -6x^2 \\ 1 + x^3y^3 = 19x^3 \end{cases}$

Bài 44. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{2x + y} = 3 - 2x - y \\ \sqrt[3]{x + 6} = 4 - \sqrt{1 - y} \end{cases}$

Bài 45. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2y + 3xy = 4x^2 + 9y \\ 7y + 6 = x(2x + 9) \end{cases}$

Bài 46. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} -x^2y + 2xy^2 + 3y^3 - 4(x + y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) - 1 = 3xy - (x + y)^2 \end{cases}$

Bài 47. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2y} = (x^2 + 3y^2)(y^2 + 3x^2) \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2y} = 2(y^4 - x^4) \end{cases}$

Bài 48. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy = 2 \\ x^3 + 2xy^2 - 2y = x \end{cases}$

Bài 49. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x + 1)^2(y + 1)^2 = 27xy \\ (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10xy \end{cases}$

Bài 50. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x + y + 5} - \sqrt{3x + 2y} = -1 \\ \sqrt{x + 1} + x + 3 - y = 0 \end{cases}$

Bài 51. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 7x^2 - 14x + 3y^3 + 10 = 0 \end{cases}$

Bài 52. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3 + 2x^2y^2 - x^4y^2} + x^4(1 - 2x^2) = y^4 \\ 1 + \sqrt{1 + (x - y)^2} = x^3(x^3 - x + 2y^2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 53. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}=\dfrac{(x-y)^2}{2} \\ (x+y)(x+2y)+3x+2y=4 \end{cases}$

Bài 54. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x-y)\sqrt{y}=\sqrt{x} \\ (x+y)\sqrt{x}=3\sqrt{y} \end{cases}$

Bài 55. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+2xy^2+12y=0 \\ 8y^2+x^2=12 \end{cases}$

Bài 56. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{17}{4} \\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52 \end{cases}$

Bài 57. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2}(x-y)=\sqrt{xy} \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$

Bài 58. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$

Bài 59. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y\sqrt{x^2-y^2}=18 \\ x+y+\sqrt{x^2-y^2}=24 \end{cases}$

Bài 60. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-y+\dfrac{2y}{x}=-2 \\ 2xy-2y^2+x=0 \end{cases}$

Bài 61. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+y^3=x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$

Bài 62. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ 1+y^2=5(x^2+1) \end{cases}$

Bài 63. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2(x^2+1)+7y \end{cases}$

Bài 64. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} e^{x-y}=\dfrac{\sin x}{\sin y} \\ 3\sqrt{8x^2+3}+1=6\sqrt{2y^2-2y+1}+8y \end{cases}$ $x,y\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 65. Giải phương trình: $\begin{cases} \left(1+4^{2x-y}\right)5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1} \\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0 \end{cases}$

Bài 66. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{\frac{1-x^2}{x^2}} - 2^y = -xy - \dfrac{3}{2} \\ \left(x^2y+2x\right)^2 - 2x^2y+1-4x=0 \end{cases}$

Bài 67. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{x^2+1} - 4^{8y^2+\frac{1}{2}} = 3\left(2\sqrt{y}-\sqrt{x}\right) \\ 2^{(x+y)^2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{x+y} = \dfrac{7}{2} \end{cases}$

Bài 68. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+2x=3 \\ 2\left(x^3+y^3\right)+6x^2 = 5+3\left(x^2+y^2\right) \end{cases}$

Bài 69. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3} = \dfrac{31}{7} \end{cases}$

Bài 70. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt[3]{1+x}+\sqrt{1-y}=2 \\ x^2-y^4+9y = x\left(9+y-y^3\right) \end{cases}$

Bài 71. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x+3y+2}-3\sqrt{y}=\sqrt{x+2} \\ \sqrt{y-1}-\sqrt{4-x}+8-x^2=0 \end{cases}$

Bài 71. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-2)(2y-1)=x^3+20y-28 \\ 2\left(\sqrt{x+2y}+y\right)=x^2+x \end{cases}$

Bài 72. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3-4x^2+3x-1=2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} \\ \sqrt{x+2}=\sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}}+1 \end{cases}$

Bài 73. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y} \\ \sqrt{x^2-16}=2+\sqrt{y-3x} \end{cases}$

Bài 74. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6\dfrac{x}{y}-2=\sqrt{3x-y}+3y \\ 2\sqrt{3x+\sqrt{3x-y}}=6x+3y-4 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 75. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x\left(1+2\sqrt{1-y^2}\right) \\ \sqrt{2x+y}-\sqrt{x+2y}=\sqrt{x-y} \end{cases}$

Bài 76. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y+y^3=x^4+x^6 \\ 2x+\sqrt{1+y}=\dfrac{\sqrt{(1+y)^3}}{1-x^2} \end{cases}$

Bài 77. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y+2\sqrt{4x+y}=1 \\ \sqrt{46-16y(x+y)-6y}+4\sqrt{4x+y}=8-4y \end{cases}$

Bài 78. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y+1}+1=4(x+y)^2+\sqrt{3x+3y} \\ 12x\left(2x^2+3y+7xy\right)=-1-12y^2(3+5x) \end{cases}$

Bài 79. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(2x^2-1\right)\left(2y^2-1\right)=\dfrac{7}{2}xy \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0 \end{cases}$

Bài 80. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y+\dfrac{2}{3}\sqrt{x^2-12y+1}=\dfrac{1}{12}\left(x^2+17\right) \\ \dfrac{x^2}{8y}+\dfrac{2x}{3}=\sqrt{\dfrac{x^3}{3y}+\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{y}{2} \end{cases}$

Bài 81. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2-2^{1+\log_2 x^3}=\log_2\left(y^2+1\right)-\log_2 y \\ y^3-2x^2y=y(y-x) \end{cases}$

Bài 82. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_7(2x+3y)=\log_3(2x+3y+2) \\ \ln\left(4x^2+x+1\right)+x^3+21=9y \end{cases}$

Bài 83. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2\sqrt{x+y}=3\log_8\left(\sqrt{x-y}+2\right) \\ \sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x^2-y^2}=3 \end{cases}$

Bài 84. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{y+4x}=y^{5y-\frac{5x}{3}} \\ x^3=\dfrac{1}{y} \end{cases}$

Bài 85. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{x^2+2}-9^{2y^2+1}=2\left(\sqrt{2y}-\sqrt{x}\right) \\ 3^{(x+y)^2+2}+2\sqrt{x+y}=29 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 86. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2+(y-3)x-4y=-3 \\ 2\sqrt[3]{x-2}+5\sqrt{2-y}=12 \end{cases}$

Bài 87. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{30+x}-\sqrt{18-y}=1 \\ \sqrt{45+2y}-\sqrt{20-x}=2 \end{cases}$

Bài 88. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{10}{2x+3y}+\dfrac{1}{xy}=1 \\ \dfrac{124}{4x^2+9y^2}-\dfrac{1}{x^2y^2}=1 \end{cases}$

Bài 89. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{7x}{2y} \\ y^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{7y}{2x} \end{cases}$

Bài 90. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4.64^{\frac{x-y^2}{y^2}}+\dfrac{1}{4}.64^{\frac{x^2-y}{x^2}}=2.8^{\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}} \\ \log_2\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}\right)+\log_3(xy)=3 \end{cases}$

Bài 91. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=4 \\ \left(\dfrac{2x}{y^2}-1\right)\left(\dfrac{y}{x^2}-9\right)=18 \end{cases}$

Bài 92. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=2 \\ \dfrac{72xy}{x-y}+29\sqrt[3]{x^2-y^2}=4 \end{cases}$

Bài 93. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x}{x^2-y}+\dfrac{5y}{x+y^2}=4 \\ 5x+y+\dfrac{x^2-5y^2}{xy}=5 \end{cases}$

Bài 94. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 14x^3+3y^2+1=0 \\ 4xy+2y=5x+2y^2+2 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 95. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+1)(y+1)+1=(x^2+x+1)(y^2+y+1) \\ x^3+3x=(x^3-y+4)\sqrt{x^3-y+1} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 96. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (3x+y)(x+3y)\sqrt{xy}=14 \\ (x+y)(x^2+14xy+y^2)=36 \end{cases}$

Bài 97. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)(y^2+6)=y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6)=x(y^2+1) \end{cases}$

Bài 98. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x^2+4y^2)=8y^4(y^2+1) \\ \sqrt{5x+6}+\sqrt{2y^2+7}=7 \end{cases}$

Bài 99. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{4x-y^2}-\sqrt{y+2}=\sqrt{4x^2+y} \\ 4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1} \end{cases}$

Bài 100. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^3+6y}+2y+1=\sqrt{x^3+4x^2+7x+4} \\ (2x^2-2y^2+xy)^2=(4x^2+y^2)(10x^2-14xy+5y^2) \end{cases}$

Bài 101. Tìm số nghiệm của hệ: $\begin{cases} x^2=y^3 \\ x+y^2+12\sqrt[8]{x^2y}=2012 \end{cases}$

Bài 102. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{2x+3y}+\sqrt{5-x-y}=7 \\ 3\sqrt{5-x-y}-\sqrt{2x+y-3}=1 \end{cases}$

Bài 103. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(x+y)^2=9 \\ x(x^3-y^3)=7 \end{cases}$

Bài 104. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=2xy \\ (x+3)\sqrt{2x-1}+(y+3)\sqrt{2y-1}=2\sqrt{(x+3)(y+3)} \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 105. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-\sqrt{y+1}=\dfrac{5}{2} \\ y+2(x-3)\sqrt{x+1}=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Giải các hệ phương trình, hệ bất phương trình sau:

1.1. $\begin{cases} x+\sqrt{y-1}=6 \\ \sqrt{x^2+2x+y}+2x\sqrt{y-1}+2\sqrt{y-1}=29 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{2}+\dfrac{y+1}{\sqrt{x}}=\dfrac{x+y}{x} \\ 2\sqrt{y}+\dfrac{x-2}{\sqrt{y}}=\dfrac{2y+x}{y} \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} y^2+(4x-1)^2=\sqrt[3]{32x^2+4x} \\ 40x^2+x=y\sqrt{14x-1} \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=2 \\ \dfrac{72xy}{x-y}+29\sqrt[3]{x^2-y^2}=4 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x+\dfrac{y}{x+\sqrt{1+x^2}}+y^2=0 \\ \dfrac{x^2}{y^2}+2\sqrt{1+x^2}+y^2=3 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x^2-8y^3=2xy(1-2y) \\ \sqrt{x^3+4x}=1+\dfrac{(2y+1)^2}{3} \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{4-2y}+\sqrt{5+2y-(x-1)^2}=5 \\ 3x^4+(x-y)^2=6x^3y+y^2 \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} 9x^3+x-\left(y-\dfrac{5}{3}\right)\sqrt{3y-6}=0 \\ x^2+x+2=\sqrt{y+2} \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} x^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{1-y}-34=2xy+x \\ y^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{1-y}-34=-xy+2y \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.10. $\begin{cases} x^2-8y^3=2xy(1-2y) \\ \sqrt{x^3+4x}=1+\dfrac{(2y+1)^2}{3} \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} (x+y)^4+3=4(x+y) \\ \dfrac{x^4-y^4}{64}+\dfrac{9(x^2-y^2)}{32}+\dfrac{7(x-y)}{8}+3\ln\left(\dfrac{x-3}{y-3}\right)=0 \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} 2x-2y+\sqrt{2x+y+2xy+1}=1 \\ \sqrt[3]{3y+1}=8x^3-2y-1 \\ x>0 \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} x^4+2x^2y+x^2+y^2+y=6 \\ x^2+y^2+y=3 \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} x^2+xy=x+2 \\ (2y^2+5)x+13x^2=26 \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} x+2y+2\sqrt{4x+y}=1 \\ \sqrt{46-16y(x+y)-6y}+4\sqrt{4x+y}=8-4y \end{cases}$

Đáp số: $(x,y)=\left(\dfrac{3}{7},-\dfrac{5}{7}\right)$

1.16. $\begin{cases} 2x^2-3y^2=4 \\ \sqrt{3xy-y^2}=xy \end{cases}$

Đáp số: $(x,y)=(\pm\sqrt{2},0);\left(\pm\sqrt{\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}},\pm(2-\sqrt{2})\sqrt{\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}}\right)$

1.17. $\begin{cases} \sqrt{x^2+6x}=y+3 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \end{cases}$

Đáp số: $(x,y)=(5,4)$

1.18. $\begin{cases} 2xy-x+2y=3 \\ x^3+4y^3=3x+6y^2-4 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$

Đáp số: $(x,y)=(1,1);\left(-2,-\dfrac{1}{2}\right)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.19. $\begin{cases} x^2+xy-3x+y=0 \\ x^4+3x^2y-5x^2+y^2=0 \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} e^x-e^{2y}+(x-2y)(x^2+y^2+3)+\ln(x+xy-2y)-\ln xy=0 \\ 2^x-3.6^y-4.3^x=0 \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} \sqrt{4x^2+(4x-9)(x-y)}+\sqrt{xy}=3y \\ 4\sqrt{(x+2)(y+2x)}=3(x+3) \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} 2(x+y)^3+4xy-3=0 \\ (x+y)^4-2x^2-4xy+2y^2+x-3y+1=0 \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} (x+y)(y-2)=(xy+1)(2y-1) \\ (x-y)(x-3)=(xy-1)(1-3x) \end{cases}$

1.24. $\begin{cases} y^2+x+xy-6y+1=0 \\ y^3x-8y^2+x^2y+x=0 \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 6x^2\sqrt{x^3-6x+5}=(x^2+2x-6)(x^3+4) \\ x+\dfrac{2}{x}=1+\dfrac{2}{y^2} \end{cases}$

1.26. $\begin{cases} 8(x^3-y^3)+9(x-9)=0 \\ 2xy+1=0 \end{cases}$

1.27. $\begin{cases} x^4+x^2y+9y=y^2x+x^2y^2+9x \\ x(y^3-x^3)=7 \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} \dfrac{10}{x+y}+\dfrac{6}{xy}=1 \\ \dfrac{124}{x^2+y^2}-\dfrac{36}{x^2y^2}=1 \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} x^3+\sqrt{x^2+2y+1}=x^2y+y+1 \\ (x+y-1)\sqrt{y+1}=10 \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.31. $\begin{cases} x^3 + y(x+2) = 2y(y+x^2) + x \\ x^2 + 3y + 2xy + 4 = 5x \end{cases}$

1.32. $\begin{cases} 10x^3y^3 - 9y^3 = (2xy - y)(4xy^2 + 3) \\ 4x^2y^2 - 2xy^2 + y^2 = 3 \end{cases}$

1.33. $\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

1.34. $\begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ y + xy^2 = -6x^2 \end{cases}$

1.35. $\begin{cases} x^2y + x = \dfrac{5}{2}y^5 \\ xy^2 + x + y = \dfrac{7}{2}y^3 \end{cases}$

1.36. $\begin{cases} 2012^{x^5+3x} + \ln\dfrac{x}{y} = 2012^{y^5+3y} \\ 2x^2 - 5y - 4 = y\sqrt{5x+4} \end{cases}$

1.37. $\begin{cases} (x-4)(x+1) = y(y+5) \\ \log_{x-2}(y+2) = \dfrac{x-2}{y^2} \end{cases}$

1.38. $\begin{cases} x^2 + y^3 = \sqrt{64 - x^2y} \\ (x^2+2)^3 = y + 6 \end{cases}$

1.39. $\begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y \\ y = 2x^2 - 1 + 2xy\sqrt{1+x} \end{cases}$

1.40. $\begin{cases} x^2y - y^2 = 3xy + x \\ x^2y^2 - xy^2 + y + 1 = 4y^2 \end{cases}$

1.41. $\begin{cases} 2x^2y + 3xy = 4x^2 + 9y \\ 7y + 6 = 2x^2 + 9x \end{cases}$

1.42. $\begin{cases} 2z(x+y) + 1 = x^2 - y^2 \\ y^2 + z^2 = 1 + 2xy + 2xz - 2yz \\ y(3x^2 - 1) = -2x(x^2 + 1) \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.43. $\begin{cases} x^4 - 4x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ x^2y + x^2 + 2y - 22 = 0 \end{cases}$

1.44. $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 7y + 2 \end{cases}$

1.45. $\begin{cases} 2\left(\sqrt{x+2y} + y\right) = x^2 + x \\ (x-2)(2y-1) = x^3 - xy \end{cases}$

1.46. $\begin{cases} x\sqrt{x^2 + 2y + x + 1} + 4y + x + 1 = 0 \\ 2\left(y^3 + 2y - x - 1\right) = y^2(x+1) \end{cases}$

1.47. $\begin{cases} 2\left(y^3 + 2y - x - 1\right) = y^2(x+1) \\ \sqrt{x^2 + 2y - 2} + \sqrt{2y - x^2} = x^2 - 2y + 3 \end{cases}$

1.48. $\begin{cases} \sqrt{2x + 3y - 1} - \sqrt{x^3 + 3y} = 1 \\ 3(2x + y - 1) = 2x^2 + 10\sqrt{x^3 + 3y} \end{cases}$

1.49. $\begin{cases} x + 2y + 2\sqrt{4x + y} = 1 \\ 2(x+3) = \sqrt{46 - 2(3 - 8x - 8y)} \end{cases}$

1.50. $\begin{cases} 2x + 3 = 17x^2 + 13xy \\ 2y - 4 = 10y^2 + 13xy \end{cases}$

1.51. $\begin{cases} \left(x^2 + 1\right)\left(y^2 + 1\right) = 10xy \\ (xy + x + y + 1)^2 = 27xy \end{cases}$

1.52. $\begin{cases} x^2 - 4\sqrt{3x - 2} + 10 = 2y \\ y^2 - 6\sqrt{4y - 3} + 11 = x \end{cases}$

1.53. $\begin{cases} \sqrt{7x + y} + \sqrt{4x + 2y + 1} = 6 \\ \sqrt{x + y + 1} + x - y = 1 \end{cases}$

1.54. $\begin{cases} 6(x+y)\left(xy + \dfrac{1}{xy} + 2\right) = \left(2x^2 + 3y^2\right)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) \\ 29\left(xy + \dfrac{1}{xy}\right) + 62 = (9x + 13y)\left(1 + \dfrac{1}{xy}\right) \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.55. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\dfrac{1}{2} \\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)^{y}=\left(y+\dfrac{1}{x}\right)^{x} \end{cases}$

1.56. $\begin{cases} \left(\sqrt{2}\right)^{x}+\left(2\sqrt{2}\right)^{y}=6 \\ xy=\dfrac{8}{3} \end{cases}$

1.57. $\begin{cases} (x-2y)\left(3x+8y+4\sqrt{x^2+4xy+4y^2-16}\right)=-6 \\ (y-4x)\left(3y+2x+2\sqrt{x^2+4xy+4y^2-16}\right)=-10 \end{cases}$

1.58. $\begin{cases} \sqrt{4x-3}=\left(2y^2+11\right)(17-y)+\sqrt{y} \\ y(y-3x+3)=5(3x+2) \end{cases}$

1.59. $\begin{cases} 2x^2y+y^3=2x^4+x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1}=(x+1)^2 \end{cases}$

1.60. $\begin{cases} \sqrt{5x-y}-\sqrt{2y-x}=1 \\ 2\sqrt{2y-x}+3xy=2x^2+y^2+3x+1 \end{cases}$

1.61. $\begin{cases} \sqrt{4x-y}-\sqrt{3y-4x}=1 \\ 2\sqrt{3y-4x}+y(5x-y)=x(4x+y)-1 \end{cases}$

1.62. $\begin{cases} y^2-6x=\sqrt{x\left(y^2+3\right)}-3 \\ \sqrt{y^2+x+2}+\sqrt[3]{2x-3}=2 \end{cases} (x, y\in\mathbb{R})$

1.63. $\begin{cases} x+2y+\sqrt{x-2y}=8 \\ y\sqrt{x-2y}=1 \end{cases}$

1.64. $\begin{cases} \sqrt{4x-y^2}-\sqrt{y+2}=\sqrt{4x^2+y} \\ 4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1} \end{cases}$

1.65. $\begin{cases} xy+y^2+x=7y \\ \dfrac{x^2}{y}+x=12 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.66. $\begin{cases} 2\left(y^3-x^3\right)=6x^2+7x-y+3 \\ 2\sqrt{3-y}+\sqrt{2(1+y)}=\sqrt{\frac{9}{4}x^2+4} \end{cases}$

1.67. $\begin{cases} x^2+y^2+\frac{8xy}{x+y}=16 \\ \frac{x^2}{8y}+\frac{2x}{3}=\sqrt{\frac{x^3}{3y}+\frac{x^2}{4}}-\frac{y}{2} \end{cases}$

1.68. $\begin{cases} x^3+3xy^2=6xy-3x-49 \\ x^2-8xy+y^2=10y-25x-9 \end{cases}$

1.69. $\begin{cases} x^2(y+1)=6y-2 \\ x^4y^2+2x^2y^2+y\left(x^2+1\right)=12y^2-1 \end{cases}$

1.70. $\begin{cases} (2x-y-2)y=1 \\ x^2+y^2+1=2x+2y \end{cases}$

1.71. $\begin{cases} \frac{4}{2x+y}+\frac{1}{3x-y}=2 \\ 4x+12y=7(2x+y)(3x-y) \end{cases}$

1.72. $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=y+\sqrt{y^2-1} \\ x^2+y^2-xy=1 \end{cases}$

1.73. $\begin{cases} \sqrt{7x^2-xy-1}=2xy-1 \\ y\sqrt{1-3x^2}=2x \end{cases}$

1.74. $\begin{cases} 2\sqrt{x+y^2+y+3}-3\sqrt{y}=\sqrt{x+2} \\ y^3+y^2-3y-5=3x-3\sqrt[3]{x+2} \end{cases}$

1.75. $\begin{cases} 8y^3+\sqrt{y-2}=y\sqrt{y-2}-2x \\ y+\sqrt{2x+1}=3 \end{cases}$

1.76. $\begin{cases} \sqrt{2\left(\frac{y}{x}+8x\right)}+3\sqrt{3\left(\frac{x}{y}+3y\right)}=4 \\ \frac{5}{xy}+144=\left(\frac{y}{x}\right)^2\left(2x+\frac{3x^4}{y^3}\right) \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.77. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{y}+1 \\ y\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3\left(x^2+1\right)} \end{cases}$

1.78. $\begin{cases} \left(2x^2-1\right)\left(2y^2-1\right)=\dfrac{7}{2}xy \\ x^2+y^2+xy-7x-6y+14=0 \end{cases}$

1.79. $\begin{cases} \sqrt{x+y+1}+1=4\left(x+y\right)^2+\sqrt{3\left(x+y\right)} \\ 12x\left(2x^2+3y+7xy\right)=-1-12y^2\left(3+5x\right) \end{cases}$

1.80. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y} \\ \sqrt{x^2-16}=2+\sqrt{y-3x} \end{cases}$

1.81. $\begin{cases} x^3y\left(1+y\right)+x^2y^2\left(2+y\right)+xy^3=30 \\ x^2y+x\left(1+y+y^2\right)+y=11 \end{cases}$

1.82. $\begin{cases} 1+xy+\sqrt{xy}=x \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x}}+y\sqrt{y}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+3\sqrt{y} \end{cases}$

1.83. $\begin{cases} x-2\sqrt{y+1}=3 \\ x^3-4x^2\sqrt{y+1}-9x-8y=-52-4xy \end{cases}$

1.84. $\begin{cases} x^4-\left(1+x^2y^2\right)\log_{\frac{1}{5}}x=y^4-\left(1+x^2y^2\right)\log_{\frac{1}{5}}y \\ x+\sqrt{2y+1}=1+\sqrt{2x-y+2} \end{cases}$

1.85. $\begin{cases} x^4+y^4=240 \\ x^3-2y^3=3\left(x^2-4y^2\right)-4\left(x-8y\right) \end{cases}$

1.86. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x\left(1-2x\right)}+\sqrt{y\left(1-2y\right)}=\dfrac{2}{9} \end{cases}$

1.87. $\begin{cases} 2y\left(4y^2+3x^2\right)=x^4\left(x^2+3\right) \\ 2^x\left(\sqrt{2y-2x+5}-x+1\right)=4 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.88. $\begin{cases} 6x^4 - \left(x^3 - x\right)y^2 - \left(y+12\right)x^2 = -6 \\ 5x^4 - \left(x^2 - 1\right)^2 y^2 - 11x^2 = -5 \end{cases}$

1.89. $\begin{cases} 2x^2 - 8xy^2 - xy + 4y^3 = 0 \\ 16x^3 + 2x - 8y^2 + 5 = 0 \end{cases}$

1.90. $\begin{cases} \left(x+y-1\right)\sqrt{x+y-1} + 6x + 2y = 20 \\ \left(3x+y-2\right)\sqrt{3x+y-2} + 2x + 2y = 18 \end{cases}$

1.91. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}} = x + y \\ x\sqrt{2xy+5x+3} = 4xy - 5x - 3 \end{cases}$

1.92. $\begin{cases} 2\left(2x+1\right)^3 + 2x + 1 = \left(2y-3\right)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \end{cases}$

1.93. $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + 4x + 1 = 0 \\ y\left(7 - \left(x-y\right)^2\right) = 2\left(x^2+1\right) \end{cases}$

1.94. $\begin{cases} \left(x^2+9\right)\left(x^2+9y\right) = 22\left(y-1\right)^2 \\ x^2 - 2 - 4y\sqrt{y+1} = 0 \end{cases}$

1.95. $\begin{cases} 2\sqrt{2x^2 - y^2} = y^2 - 2x^2 + 3 \\ x^3 - 2y^3 = y - 2x \end{cases}$

1.96. $\begin{cases} \left(23-3x\right)\sqrt{7-x} + \left(3y-20\right)\sqrt{6-y} = 0 \\ \sqrt{2x+y+2} - \sqrt{-3x+2y+8} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \end{cases}$

1.97. $\begin{cases} \sqrt{x^2 - \left(x+y\right)} = \dfrac{y}{\sqrt[3]{x-y}} \\ 2\left(x^2+y^2\right) - 3\sqrt{2x-1} = 11 \end{cases}$

1.98. $\begin{cases} \left(2x+3\right)\sqrt{4x-1} + \left(2y+3\right)\sqrt{4y-1} = 2\sqrt{\left(2x+3\right)\left(2y+3\right)} \\ x + y = 4xy \end{cases}$

1.99. $\begin{cases} x^3 + y^3 + \dfrac{3xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y}\left(\sqrt[3]{2x-y} + \sqrt[3]{6x+y}\right) = \sqrt[3]{3x-5y+5} \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.100. $\begin{cases} \dfrac{2xy+y\sqrt{x^2-y^2}}{14}=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{2}} \\ \sqrt{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^3}=9 \end{cases}$

1.101. $\begin{cases} \sqrt{xy+(x-y)\left(\sqrt{xy}-2\right)}+\sqrt{x}=y+\sqrt{y} \\ (x+1)\left(y+\sqrt{xy}+x(1-x)\right)=4 \end{cases}$

1.102. $\begin{cases} \left(y^2-4y-8\right)\left(x^2+3\right)=64\sqrt[3]{x} \\ y\left(y^2-6y+12\right)=8\left(1+x\sqrt{x}\right) \end{cases}$

1.103. $\begin{cases} \sqrt{x-y}+\sqrt{x-2}=2 \\ \sqrt{x^2+y^2-xy(x-y)}+\sqrt{xy-y^2}=2\sqrt{2}(x-y-1) \end{cases}$

1.104. $\begin{cases} \sqrt{x-y}+\sqrt{x-2}=2 \\ 4y\sqrt{x-y}+32x-y^2=44 \end{cases}$

1.105. $\begin{cases} \sqrt{x-y}=9-|x+2y| \\ x(x+4y-2)+y(4y+2)=44 \end{cases}$

1.106. $\begin{cases} x+2y^2-y\sqrt{x+3y^2}=0 \\ 2y^2-3y-x+1+\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}}{6}=0 \end{cases}$

1.107. $\begin{cases} \left(11\sqrt{2x+y}-16\sqrt{x+3y}\right)x=y\left(13\sqrt{x+3y}-23\sqrt{2x+y}\right) \\ x^2-y^2+\dfrac{4x^2+8x}{y}=-4 \end{cases}$

1.108. $\begin{cases} \dfrac{2x^2+4y^2}{xy}=4\sqrt{\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}\right)(x+y)-1} \\ \sqrt{(x+1)^2+xy+3x+2y+5-2x\sqrt{x(y+3)}}=\sqrt{x}+\sqrt{y+3} \end{cases}$

1.109. $\begin{cases} (2x+3)\sqrt{4x-1}+(2y+3)\sqrt{4y-1}=2\sqrt{(2x+3)(2y+3)} \\ x+y=4xy \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.110. $\begin{cases} 3x+10\sqrt{xy}-y=12 \\ x+\dfrac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\le 3 \end{cases}$

1.111. $\begin{cases} \sqrt{x^2-(x+y)}=\dfrac{y}{\sqrt[3]{x-y}} \\ 2\left(x^2+y^2\right)-3\sqrt{2x-11}=11 \end{cases}$

1.112. $\begin{cases} \sqrt{5x-y}-\sqrt{2y-x}=1 \\ 2\sqrt{2y-x}+3xy=2x^2+y^2+3x-1=0 \end{cases}$

1.113. $\begin{cases} 2x-y+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-2+2(2x-y)^2} \\ y^2+4x\sqrt{x-1}=17 \end{cases}$

1.114. $\begin{cases} \dfrac{x\left(y^2+1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y\left(x^2-1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

1.115. $\begin{cases} (x+y)(1+xy)=4xy \\ \left(x^2+y^2\right)\left(1+x^2y^2\right)=4x^2y^2 \end{cases}$

1.116. $\begin{cases} x^4-3\sqrt{y}=3x+y \\ x\sqrt{y}\,(y-1)=3\left(x+\sqrt{y}\right) \end{cases}$

1.117. $\begin{cases} x^2-y-4xy^2+4=0 \\ 2xy^2+4y^2-x^2y-2y=3 \end{cases}$

1.118. $\begin{cases} 2x+\sqrt{1-x+y-x^2-y^2}=1 \\ 2x^3-2y^3=1 \end{cases}$

1.119. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{x^2+y+3}=2 \\ 2\sqrt{x+4}+3\sqrt{y+8}=13 \end{cases}$

1.120. $\begin{cases} \sqrt{2y^2-7y+10-x(y+3)}+\sqrt{y+1}=x+1 \\ \sqrt{y+1}+\dfrac{3}{x+1}=x+2y \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.121. $\begin{cases} 2^{3x+1}+2^{y-2}=3.2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^5+x^4y+3x^3+x^2y+1}=\sqrt{x^4+x^2+1} \end{cases}$

1.122. $\begin{cases} x^2+2xy+y=0 \\ x^3+3xy+2\sqrt{y+1}\left(x+\sqrt{x^2y+2}\right)=4 \end{cases}$

1.123. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3x-2 \\ \left(x^2+xy\right)^4+\left(y^2+2\right)^4=17x^4 \end{cases}$

1.124. $\begin{cases} x+3=2\sqrt{(3y-x)(y+1)} \\ \sqrt{3y-2}-\sqrt{\dfrac{x+5}{2}}=xy-2y-2 \end{cases}$

1.125. $\begin{cases} x+8=\sqrt{2y-x}\sqrt{y+4} \\ x^2+2x+y=y\sqrt{x^2-x+4} \end{cases}$

1.126. $\begin{cases} x^3y^2+x^2y^2+y^2x=2x^2+2x-y^2 \\ 2x^3+3x^2+6y=12x-13 \end{cases}$

1.127. $\begin{cases} x^4+2(3y+1)x^2+\left(5y^2+4y+11\right)x-y^2+10y+2=0 \\ y^3+(x-2)y+x^2+x+2=0 \end{cases}$

1.128. $\begin{cases} \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x\left(1+2\sqrt{1-y^2}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+\sqrt{xy}}} \end{cases}$

1.129. $\begin{cases} \sqrt{3x^2y^2+y^2}-6xy(x+y)^2=48y\left(x^2+y^2\right)+y\sqrt{\dfrac{1}{y^2}-3}+12x^2y^2 \\ \sqrt{y(x+y-1)-3\left(x^2+y^2\right)+6xy-31}-\sqrt{xy+x(x+y)+y^2}=1 \end{cases}$

1.130. $\begin{cases} \sqrt{9x+\dfrac{y}{x}}+2\sqrt{y+\dfrac{2x}{y}}=4 \\ \left(\dfrac{2x}{y^2}-1\right)\left(\dfrac{y}{x^2}-9\right)=18 \end{cases}$

1.131. $\begin{cases} \sqrt{x(x-y-1)}+\sqrt[3]{(x+y)^2+(x-1)^2+6}=\sqrt{x}+2 \\ x^2+3xy+y^2=1 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.132. $\begin{cases} y+\dfrac{16x\sqrt{y}}{2x+y}=16-4x^2 \\ 2x^3-3x^2+3\sqrt[3]{x^3+3\sqrt{y}-12}-4=0 \end{cases}, x>0$

1.133. $\begin{cases} x^2+2xy+y=0 \\ x^3+3xy+2\sqrt{y+1}\left(x+\sqrt{x^2y+2}\right)=4 \end{cases}$

1.134. $\begin{cases} y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2} \\ 8xy^3+2y^3+\dfrac{1}{2}=4x^4+3x^2+x+2\sqrt{1+(2x-y)^2} \end{cases}$

1.135. $\begin{cases} x\left(x^2-1\right)+(xy+3)y=x^2+y^2 \\ y\left(x^2+1\right)+(xy+3)x=0 \end{cases}$

1.136. $\begin{cases} x^4+y^2+x^2y^2=y^3+x^2y-x^2 \\ -10x^3-5x+12y-11=2x^2\sqrt[3]{7x^3-7y+2x+7} \end{cases}$

1.137. $\begin{cases} (3x+1)\sqrt{9y^2+6y+2}-y+1=4x\sqrt{16y^2+1} \\ 2012^x-2012^y=\left(\log_3 y-\log_3 x\right)(12+4xy) \end{cases}$

1.138. $\begin{cases} y+\sqrt{3y^2-2y+6+3x^2}=3x+\sqrt{7x^2+7}+2 \\ 3y^2-4x^2-3y+3x+1=0 \end{cases}$

1.139. $\begin{cases} 1+\sqrt{x+y+1}=4(x+y)^2+\sqrt{3(x+y)} \\ \log_4(3x+2y)^2+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1}=4 \end{cases}$

1.140. $\begin{cases} x^4+2xy+6y-(7+2y)x^2=-9 \\ 2x^2y-y^3=10 \end{cases}$

1.141. $\begin{cases} 2x^3+x^2y+xy^2+\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2=y^3-\dfrac{3y^2}{4} \\ \sqrt{2+x}+\sqrt{2y-1}=5 \end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam